

سوالات امتحانات نهایی مبحث محور

درس ریاضیات گسسته ۳ ریاضی - فصل ۱ - آشنایی با نظریه اعداد

گردآورنده: علی اشرفپور رتبه ۱۰۳ منطقه ۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۱

(۱) درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

الف) حاصل ضرب هر عدد گویا در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (۰.۲۵)

(امتحان نهایی ریاضیات گسسته ۳ خرداد ۱۴۰۴)

ب) میانگین پنج عدد طبیعی همان عدد وسطی است. (۰.۲۵)

(امتحان نهایی ریاضیات گسسته ۳ خرداد ۱۴۰۳)

ج) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است. (۰.۲۵)

(امتحان نهایی ریاضیات گسسته ۳ خرداد ۱۴۰۰)

د) بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۴ و ۲- برابر ۲- است. (۰.۲۵)

(امتحان نهایی ریاضیات گسسته ۳ خرداد ۱۴۰۱)

(۲) به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن ها است. (۱.۲۵)

(امتحان نهایی ریاضیات گسسته ۳ خرداد ۱۴۰۰)

(۳) ثابت کنید اگر $p \geq 5$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $P = 4k + 1$ یا $P = 4k + 3$ نوشته می شود. (۰.۷۵)

(امتحان نهایی ریاضیات گسسته ۳ خرداد ۱۴۰۰)



۴) اگر دو عدد $(3a + 5)$ و $(4a - 7)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(9a + 6)$ را به دست آورید. (۱)

(امتحان نهایی ریاضیات گسسته ۳ شهریور ۱۴۰۰)

۵) ثابت کنید باقی مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، برابر یک است. (۱.۵)

(امتحان نهایی ریاضیات گسسته ۳ دی ۱۴۰۰)

۶) اگر در تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقیمانده تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است.

(امتحان نهایی ریاضیات گسسته ۳ دی ۱۴۰۰)

۷) اگر x, y, z سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: (۰.۷۵)

$$x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - z^2$$

(امتحان نهایی ریاضیات گسسته ۳ خرداد ۱۴۰۲)

۸) اگر عددی مانند k در باشد به طوریکه $7 \mid 2k + 1$ ، ثابت کنید: (۱.۲۵)

$$49 \mid 4k^2 - 10k - 6$$

(امتحان نهایی ریاضیات گسسته ۳ شهریور ۱۴۰۲)

۹) ثابت کنید مجموع مربعات هر دو عدد حقیقی همواره از قرینه حاصل ضرب آنها کمتر نیست. (۱)

(امتحان نهایی ریاضیات گسسته ۳ دی ۱۴۰۲)

۱۰) رقم یکان عدد $A = 2! + 4! + 6! + \dots + 1000!$ را به دست آورید. (۱.۵)

(امتحان نهایی ریاضیات گسسته ۳ دی ۱۴۰۲)



@bartarhakanoon

(۱۱) اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب ۲ و ۳ باشد، باقی مانده تقسیم عدد a را بر ۲۰ بیابید. (۱.۲۵)

(امتحان نهایی ریاضیات گسسته ۳ خرداد ۱۴۰۳)

(۱۲) جواب های عمومی معادله سیاله $5x + 7y = 22$ را به دست آورید. (۱.۵)

(امتحان نهایی ریاضیات گسسته ۳ خرداد ۱۴۰۳)

(۱۳) ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست. (۱.۲۵)

(امتحان نهایی ریاضیات گسسته ۳ شهریور ۱۴۰۳)

(۱۴) اگر a و b دو عدد صحیح و ab فرد باشد، باقی مانده $a^2 + b^2 - 5$ بر ۸ را حساب کنید. (۱.۵)

(امتحان نهایی ریاضیات گسسته ۳ شهریور ۱۴۰۳)

(۱۵) اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و $2a \mid 3n - 4$ و $2a \mid 5m - 2$ جواب های صحیح a را مشخص کنید؟ (۱.۵)

(امتحان نهایی ریاضیات گسسته ۳ دی ۱۴۰۳)

(۱۶) برای دو عدد حقیقی x و y نشان دهید :

$$3x^2 + y^2 \geq 6x - 3$$

(امتحان نهایی ریاضیات گسسته ۳ دی ۱۴۰۳)

(۱۷) برای هر دو عدد حقیقی a و b ، گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید: (۱.۲۵)

$$5a^2 + b^2 \geq 4ab$$



(امتحان نهایی ریاضیات گسسته ۳ خرداد ۱۴۰۴)

۱۸) اگر باقیمانده تقسیم دو عدد صحیح m و n بر ۱۹ به ترتیب ۵ و ۴ باشد، آنگاه باقیمانده تقسیم عدد $(3m - 5n)$ بر ۱۹ را به دست آورید. (۱.۵)

(امتحان نهایی ریاضیات گسسته ۳ خرداد ۱۴۰۴)



@bartarhakanoon

پاسخنامه

(۱)

الف) نادرست

ب) نادرست

ج) درست

د) نادرست

(۲)

$$xy \leq \frac{x^r + y^r}{2} \quad (0/25) \Leftrightarrow 2xy \leq x^r + y^r \quad (0/25) \Leftrightarrow x^r + y^r - 2xy \geq 0 \quad (0/25) \Leftrightarrow (x-y)^r \geq 0 \quad (0/25)$$

(۳)

$$p = 4k \quad (۱) , \quad p = 4k + 1 \quad (۲) , \quad p = 4k + 2 = 2(2k + 1) \quad (۳) , \quad p = 4k + 3 \quad (۴) \quad (0/25)$$

در حالت (۱) و (۳)، p عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد (۰.۲۵) بنابراین اعداد اول به فرم (۲) یا (۴) خواهند بود. (۰.۲۵)

(۴)

$$4a - 7 \equiv 3a - 5 \pmod{25} \Rightarrow a \equiv 2 \pmod{25} \Rightarrow 9a + 6 \equiv 24 \equiv 4 \pmod{25} \Rightarrow r = 4 \pmod{25}$$

(۵)

$$a = 2k + 1 \quad (0/25) \Rightarrow a^r = 4k^r + 4k + 1 \quad (0/25) = 4k(k+1) + 1 \quad (0/25) = 4 \times 2q + 1 \quad (0/25) = 8q + 1 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow r = 1 \quad (0/25)$$

ضرب دو عدد صحیح متوالی

(۶)

$$a = bq + r , \quad 0 \leq r < b \quad (0/25) \Rightarrow a - bq = r \quad (0/25) \Rightarrow \begin{cases} n | a \\ n | b \end{cases} \quad (0/25) \Rightarrow n | a - bq \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow n | r \quad (0/25)$$



@bartarhakanoon

$$x^r + y^r + 1 \geq 2xy - z^r \Leftrightarrow \underbrace{x^r + y^r - 2xy + z^r + 1}_{(\cdot/25)} \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x-y)^r + z^r + 1}_{(\cdot/25)} \geq 0. \quad (7)$$

$$v \mid 2k+1 \Rightarrow \begin{cases} 49 \mid \underbrace{4k^2 + 4k + 1}_{(\cdot/5)} \\ 49 \mid \underbrace{14k + 7}_{(\cdot/5)} \end{cases} \Rightarrow 49 \mid 4k^2 - 10k - 6 (\cdot/25) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} a^r + b^r &\geq -ab (\cdot/25) \Leftrightarrow a^r + b^r + ab \geq 0 (\cdot/25) \Leftrightarrow 2a^r + 2b^r + 2ab \geq 0 (\cdot/25) \\ &\Leftrightarrow a^r + b^r + (a^r + b^r + 2ab) \geq 0 (\cdot/25) \Leftrightarrow a^r + b^r + (a+b)^r \geq 0 (\cdot/25) \end{aligned} \quad (9)$$

همواره برقرار

$$A = 2! + 4! + 6! + \dots + 100! \Rightarrow A = 2! + 4! + 100k, k \in \mathbb{Z} (\cdot/25) \quad (10)$$

مضرب 2 و 5

$$\Rightarrow A \equiv 2 + 24 + 0 (\cdot/5) \Rightarrow A \equiv 26 \equiv 1 (\cdot/5)$$

(11)

$$\begin{aligned} a &= 4q_1 + 2 (\cdot/25) & \Rightarrow & \Delta a = 20q_1 + 10 (\cdot/25) \\ a &= 5q_r + 3 (\cdot/25) & \Rightarrow & 4a = 20q_r + 12 (\cdot/25) \end{aligned} \quad \text{روش اول:}$$

$$\Rightarrow a = 20(q_1 - q_r) \cdot 2 (\cdot/25) \quad a = 20q_r + 18 \Rightarrow r = 18 \text{ ی } r = -2 + 20 = 18 (\cdot/25)$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} a &\equiv 2 \equiv 18 (\cdot/25) & \Rightarrow & a = 4k + 18 (\cdot/25) \\ a &\equiv 3 \equiv 18 (\cdot/25) & \Rightarrow & 4k + 18 \equiv 18 (\cdot/25) \Rightarrow k \equiv 0 (\cdot/25) \Rightarrow a = 2 \cdot 0 + 18 \Rightarrow r = 18 (\cdot/25) \end{aligned}$$

$$\Delta x \equiv 22 (\cdot/25) \Rightarrow x \equiv 8 (\cdot/5) \Rightarrow x = 9k + 8 \text{ ی } x = 9k - 1 (\cdot/25)$$

روش اول:

$$\left. \begin{aligned} \Delta(9k+8) + 9y &= 22 \\ \Delta(9k-1) + 9y &= 22 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (\cdot/25) \Rightarrow y &= -2 - \Delta k \text{ ی } y = -\Delta k + 3 (\cdot/25) \end{aligned}$$

روش دوم:

$$9y \equiv 22 (\cdot/25) \Rightarrow y \equiv 3 (\cdot/5) \Rightarrow y = \Delta k + 3 \text{ ی } y = \Delta k - 2 (\cdot/25)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta x + 9(\Delta k + 3) &= 22 \\ \Delta x + 9(\Delta k - 2) &= 22 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (\cdot/25) \Rightarrow x &= -1 - 9k \text{ ی } x = -9k + 8 (\cdot/25) \end{aligned}$$



@bartarhakanoon

(۱۳)

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \underbrace{a+b \geq 2\sqrt{ab}}_{(./25)} \Leftrightarrow \underbrace{a^r + b^r + 2ab \geq 4ab}_{(./25)} \Leftrightarrow \underbrace{a^r + b^r - 2ab \geq 0}_{(./25)} \Leftrightarrow \underbrace{(a-b)^r \geq 0}_{(./25)}$$

(۱۴)

$$\begin{aligned} a &= 2k+1 & b &= 2k'+1 \\ (./25) &\rightarrow a^r \equiv 1 \pmod{25} & b^r &\equiv 1 \pmod{25} \\ &\rightarrow \underbrace{a^r + b^r}_{(./25)} \equiv 2 & \rightarrow \underbrace{a^r + b^r - 5}_{(./25)} &\equiv -3 \equiv 5 \rightarrow r = 5 \pmod{25} \end{aligned}$$

$$2a \mid 5m-2 \xrightarrow{\times 2} 2a \mid 15m-6 \pmod{25} \xrightarrow{-} 2a \mid 14 \pmod{25} \rightarrow a \mid 7 \pmod{25} \quad (15)$$

$$2a \mid 3m-4 \xrightarrow{\times 5} 2a \mid 15m-20 \pmod{25}$$

$$\Rightarrow a = \pm 1, \pm 7 \pmod{5}$$

(۱۶)

$$3x^r + y^r \geq 6x-3 \Leftrightarrow 3x^r - 6x + 3 + y^r \geq 0 \pmod{25} \Leftrightarrow 3(x-1)^r + y^r \geq 0 \pmod{5}$$

نامساوی همواره برقرار است. (./25) (ذکر برگشت پذیر بودن نامساویها (./25))

$$\begin{aligned} 5a^r + b^r &\geq 4ab \xrightarrow{\times 2} 10a^r + 2b^r \geq 8ab \pmod{25} \\ \Leftrightarrow (9a^r - 6ab + b^r) + (a^r - 2ab + b^r) &\geq 0 \pmod{25} \\ \Leftrightarrow (3a-b)^r + (a-b)^r &\geq 0 \pmod{25} \\ &\text{(./25) و روابط بالا برگشت پذیرند. (./25)} \end{aligned} \quad (17)$$

$$m \equiv 4 \pmod{25}, n \equiv 5 \pmod{25} \Rightarrow 3m - 5n \equiv 12 - 25 \equiv -13 \pmod{5} \quad (18)$$

$$\Rightarrow 3m - 5n \equiv -13 + 19 \equiv 6 \pmod{25} \Rightarrow r = 6 \pmod{25}$$



@bartarhakanoon