

سوالات امتحانات نهایی مبحث محور

درس هندسه ۳ ریاضی - فصل ۱ - ماتریس ها

گردآورنده: علی اشرفپور رتبه ۱۰۳ منطقه ۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۱

(۱) درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

الف) هر ماتریس مربعی یک ماتریس اسکالر است.

(امتحان نهایی هندسه ۳ خرداد ۱۴۰۴)

ب) وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر به فرد است.

(امتحان نهایی هندسه ۳ شهریور ۱۴۰۳)

ج) اگر در ماتریس A تعداد سطرها با تعداد ستون ها برابر باشد، ماتریس A را مربعی می نامیم.

(امتحان نهایی هندسه ۳ دی ۱۴۰۳)

د) اگر زاویه بین دو بردار مخالف صفر، منفرجه باشد، آنگاه ضرب داخلی آنها یک عدد حقیقی مثبت است.

(امتحان نهایی هندسه ۳ خرداد ۱۴۰۰)

(۲) حاصل هر یک از عبارت های ستون A را از ستون B انتخاب کنید و در پاسخبرگ بنویسید.

(یکی از اعداد ستون B اضافه است). (امتحان نهایی هندسه ۳ خرداد ۱۴۰۴)

B	A
۲	الف) مقدار عددی $ 2A $ در صورتی که $ A_{2 \times 2} = 1$
۴	ب) مقدار عددی درایه b_{13} در ماتریس $B = [2j + i]_{3 \times 3}$
۵	پ) مقدار عددی $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$
۷	



(۳) دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & m-2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ n+1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 0 & n \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ مفروضه اند، اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل AB را محاسبه کنید.

(امتحان نهایی هندسه ۳ خرداد ۱۴۰۰)

(۴) الف) اگر A ماتریس 2×2 و اسکالر باشد و $a_{22} = 3$ در این صورت A و $|A|$ را بیابید.

ب) دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ e & 0 & f \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ 0 & d & 0 \\ e & 0 & f \end{bmatrix}$ ، k عددی حقیقی است را در نظر بگیرید. با محاسبه $|A|$ و $|B|$ نشان دهید که: $|B| = k|A|$.

(امتحان نهایی هندسه ۳ شهریور ۱۴۰۳)

(۵) دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ را بر حسب ستون اول به دست آورید.

(امتحان نهایی هندسه ۳ دی ۱۴۰۳)

(۶) اگر $2A = \begin{bmatrix} |A| & -4 \\ 1 & |A| \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت حاصل $|A^{-1}|$ را بیابید.

(امتحان نهایی هندسه ۳ خرداد ۱۴۰۰)

(۷) جواب دستگاه زیر را در صورت وجود، با استفاده از ماتریس وارون بیابید.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

(امتحان نهایی هندسه ۳ خرداد ۱۴۰۰)

(۸) اگر $A = \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این صورت حاصل $x + 2y + 3z$ را به دست آورید.

(امتحان نهایی هندسه ۳ دی ۱۴۰۰)

(۹) اگر $A = [2i - 3j]_{3 \times 2}$ و $B_{2 \times 3} = \begin{cases} -1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$ باشد، دترمینان ماتریس AB را به دست آورید.

(امتحان نهایی هندسه ۳ دی ۱۴۰۰)



(۱۰) اگر ماتریس A را ماتریس ضرایب و X را ماتریس مجهولات و B را ماتریس معلومات دستگاه دو معادله و دو مجهولی

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -4x + 3y = 2 \end{cases} \text{ در نظر بگیریم، از تساوی } AX=B \text{ ماتریس } X \text{ را به دست آورید.}$$

(امتحان نهایی هندسه ۳ دی ۱۴۰۰)

(۱۱) اگر A ماتریس 3×3 باشد، $|A| = 4$ باشد، آنگاه حاصل $|A| \cdot A$ را به دست آورید.

(امتحان نهایی هندسه ۳ دی ۱۴۰۰)

(۱۲) ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x+1 & y+2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید، اگر $A+B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مقادیر x و y را به دست آورید.

(امتحان نهایی هندسه ۳ خرداد ۱۴۰۲)

(۱۳) ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ معرفی شده است، مقدار k را طوری پیدا کنید که رابطه $k|kA| = 625$ برقرار باشد.

(امتحان نهایی هندسه ۳ خرداد ۱۴۰۲)

(۱۴) در تساوی ماتریسی $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A را به دست آورید.

(امتحان نهایی هندسه ۳ خرداد ۱۴۰۲)

(۱۵) اگر $A = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 1 \\ 1 & |A| & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A|$ را بیابید.

(امتحان نهایی هندسه ۳ خرداد ۱۴۰۲)

(۱۶) اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که $A \times B$ ماتریس قطری باشد.

(امتحان نهایی هندسه ۳ خرداد ۱۴۰۱)

(۱۷) ماتریس A مربعی مرتبه سه به صورت $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i=j \\ j & i>j \\ 0 & i<j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد،

الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. ب) دترمینان ماتریس B را محاسبه کنید.

(امتحان نهایی هندسه ۳ خرداد ۱۴۰۱)



@bartarhakanoon

(۱۸) دستگاه $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 7x + 4y = 15 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

(امتحان نهایی هندسه ۳ خرداد ۱۴۰۱)

(۱۹) الف) اگر $A = \begin{bmatrix} m & 0 \\ m-2 & n \end{bmatrix}$ ماتریسی اسکالر باشد مقادیر m و n را بیابید.

ب) اگر $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ ، ماتریس B را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

پ) ماتریس $(B^2 + 2I)$ را محاسبه کنید. (I ماتریس همانی مرتبه سه است)

(امتحان نهایی هندسه ۳ دی ۱۴۰۱)

(۲۰) اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، نشان دهید: $(5A)^{-1} = \frac{1}{5} A^{-1}$

(امتحان نهایی هندسه ۳ دی ۱۴۰۱)

(۲۱) با استفاده از ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها و ماتریس همانی I درستی رابطه زیر را ثابت کنید:

$$(A - 3I)^2 = A^2 - 6A + 9I$$

(امتحان نهایی هندسه ۳ دی ۱۴۰۱)

(۲۲) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، حاصل $|\frac{1}{2}A^4|$ را به دست آورید.

(امتحان نهایی هندسه ۳ دی ۱۴۰۱)



پاسخنامه

(د) نادرست

(ج) درست

(ب) درست

(۱) الف نادرست

(پ) ۲

(ب) ۷

(۲) الف ۴

(۳)

$$\begin{cases} m-2=0 \\ n+1=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m=2 & (0/25) \\ n=-1 & (0/25) \end{cases}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ 9 & -3 & 6 \end{bmatrix} (0/5)$$

(۴) الف (صفحه ۳۰ کتاب درسی)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 9$$

(ب) صفحه ۳۱ کتاب درسی

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ 0 & d & 0 & 0 & d \\ e & 0 & f & e & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = (adf + 0 + 0) - (edc + 0 + 0) = adf - edc$$

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc & ka & kb \\ 0 & d & 0 & 0 & d \\ e & 0 & f & e & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow |B| = kadf - kedc = k(adf - edc) = k|A|$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (-1)^1 \times 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^2 \times 0 \times \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^3 \times (-3) \times \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = (-32) + 0 + 12 = (-20)$$

$$|2A| = (|A|^2 + 4) \longrightarrow (|A| - 2)^2 = 0 \longrightarrow |A| = 2 \quad (0/25)$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2} \quad (0/25)$$



@bartarhakanoon

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{(\cdot/\Delta)} = \underbrace{\frac{1}{3+1} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}}_{(\cdot/\Delta)} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (\cdot/\Delta) \quad (7)$$

$$A = B \rightarrow \begin{bmatrix} 2x & \Delta \\ z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 2x = 3 \\ 2x + y = \Delta \\ z = -2 \end{cases} \xrightarrow{(\cdot/\Delta)} \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 2 \end{cases} \xrightarrow{(\cdot/\Delta)} x + 2y + 3z = \frac{-1}{2} (\cdot/\Delta)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} (\cdot/\Delta), \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} (\cdot/\Delta) \quad (8)$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & \Delta \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} (\cdot/\Delta)$$

$$\longrightarrow |AB| = 4(6) - 1(-6) + \Delta(-6) = 0 (\cdot/\Delta)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\cdot/\Delta)} \underbrace{X = A^{-1}B}_{(\cdot/\Delta)} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}}_{(\cdot/\Delta)} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix} (\cdot/\Delta) \quad (10)$$

$$|A|A| = |4A| = \underbrace{4^r |A|}_{(\cdot/\Delta)} = 4^r (\cdot/\Delta) \quad (11)$$

$$x = 2 (\cdot/\Delta), \quad y = -1 (\cdot/\Delta) \quad (12)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\cdot/\Delta) \Rightarrow |A| = 1 (\cdot/\Delta) \quad (13)$$

$$k|kA| = k(\underbrace{k^r |A|}_{(\cdot/\Delta)}) = k^r \times 1 = 625 \Rightarrow k = \pm 5 (\cdot/\Delta)$$



$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}^{-1}}_{(\cdot/\Delta)} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{(\cdot/\Delta)} = \frac{1}{15-14} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 17 & -9 \end{bmatrix} (\cdot/\Delta)$$

$$\underbrace{|A| = |A|(|A| - 2) + 1(2)}_{(\cdot/\Delta)} \Rightarrow |A|^2 - 2|A| + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 1 \\ |A| = 2 \end{cases} (\cdot/\Delta)$$

$$A \times B = \underbrace{\begin{bmatrix} 4+2a & -1+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}}_{(\cdot/\Delta)} \Rightarrow \begin{cases} 2a-1=0 \\ b-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1/2 \\ b=3 \end{cases} \quad \text{ص ٢١}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} (\cdot/\Delta)$$

$$|B| = 39 (\cdot/\Delta)$$

$$\underbrace{X = A^{-1} \times B}_{\cdot/\Delta} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{1} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}}_{(\cdot/\Delta)} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}}_{(\cdot/\Delta)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{(\cdot/\Delta)} \quad x=1, y=2$$

$$m-2=0 \xrightarrow{(\cdot/\Delta)} m=2 (\cdot/\Delta) \quad n=m=2 (\cdot/\Delta) \quad \text{ص ١٢} \quad (19)$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} (\cdot/\Delta) \quad \text{ص ٢١}$$

$$(B^T + 2I) = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 6 & 10 & 8 \\ 7 & 7 & 18 \end{bmatrix}}_{(\cdot/\Delta)} + 2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{(\cdot/\Delta)} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 6 & 12 & 8 \\ 7 & 7 & 20 \end{bmatrix} (\cdot/\Delta) \quad \text{ص ١٩ و ٢٠}$$



$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} (\cdot / 5) \rightarrow \frac{1}{5} A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix} (\cdot / 25) \quad (20)$$

$$5A = \begin{bmatrix} 15 & -5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} (\cdot / 25) \rightarrow (5A)^{-1} = \frac{1}{-25} \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix} (\cdot / 25)$$

$$(A - 3I)^T = \underbrace{(A - 3I)(A - 3I)}_{(\cdot / 25)} = \underbrace{A^T - 3AI - 3IA + 9I^T}_{(\cdot / 25)} \stackrel{AI=IA=A}{\underset{I^T=I}{=}} A^T - 6A + 9I (\cdot / 5) \quad (21)$$

ص ۳۱ و ۱۹

$$|A| = 2 (\cdot / 5), \quad \left| -\frac{1}{2} A^T \right| = \underbrace{\left(-\frac{1}{2} \right)^2}_{(\cdot / 5)} |A|^T = -2 (\cdot / 25) \quad (22)$$

ص ۳۱ و ۲۸

