

## سوالات مبحث محور امتحان نهایی

### درس حسابان 2، رشته ریاضی فصل 4، مشتق

(پاسخنامه در انتهای مطلب)

گردآوری: سجاد مردانی، رتبه 425 منطقه 1 کنکور ریاضی 1404، دانشجوی مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی شریف

1: درستی یا نادرستی هریک از عبارت های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر  $f(x) = \sin x$  آنگاه:  $f'(\frac{\pi}{2}) = f''(\pi)$

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1404)

(ب)

تابع  $y = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 1 \\ 2x-1 & x < 1 \end{cases}$  در نقطه به طول  $x = 1$  مشتق پذیر است.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1404)

ب) نقطه  $x = 0$  یک نقطه گوشه ای تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  است.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1403)

(ت)

تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$  در نقطه  $x = 1$  مشتق پذیر است.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1403)

ث) تابع  $f$  روی بازه  $(a, b)$  مشتق پذیر است هر گاه، در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1402)

ج) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن همواره صعودی است.



(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1402)

چ) تابع  $f(x)=[x]$  در نقطه  $x=1$  مشتق پذیر است.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1402)

ح) تابعی وجود ندارد که برای آن شرایط  $f'(a)=0$  ,  $f(a)=0$  برقرار باشد

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 99) و (امتحان نهایی حسابان 2 دی 1402)

خ) اگر تابع  $f$  در  $x=a$  پیوسته باشد و در این نقطه ، مشتق چپ و راست نامتناهی باشد آنگاه  $f'(a)$  وجود ندارد.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1401)

د) اگر  $f'(1)=2$  و  $g'(1)=-3$  باشد، حاصل  $(3f+g)'(1)$  برابر 9 است.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1401)

ذ) تابع  $f(x)=[x]$  در نقطه  $x=0$  مشتق پذیر است.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1400)

ر) خط  $x=1$  مماس قائم منحنی  $f(x)=\sqrt[3]{x}$  است.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 99)

ز) اگر تابع  $f$  در  $x=a$  پیوسته نباشد آنگاه  $f$  در  $a$  مشتق پذیر هم نیست

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 99)

ژ) اگر خط  $x=a$  مماس قائم بر منحنی تابع  $f(x)$  در نقطه  $(a,f(a))$  باشد آنگاه  $f'(a)$  موجود است.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 99)

2: جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید

الف) مشتق تابع  $f(x)=\sqrt{2}$  در  $x=1$  برابر با ..... است. (صفر، یک)



(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1404)

ب) اگر  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 1$  باشد، حاصل  $f''_{(-1)}$  برابر ..... است.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1403)

پ) اگر  $f(4) = -1$  و  $f'_4 = 2$ ، خط مماس بر نمودار  $f$  در  $x=4$ ، محور  $y$  ها را در نقطه ای به عرض ..... قطع می کند.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1403)

ت) مشتق دوم تابع  $f(x) = \sin x$  در نقطه  $x = \frac{\pi}{2}$  برابر ..... است.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1403)

ث) اگر تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته .....، آنگاه  $f$  در  $x = a$  مشتق پذیر نیست.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1401)

ج) شیب خط مماس بر منحنی  $y = 1 - 5x^2 - 2x$  در نقطه ای به طول ۲- واقع بر آن برابر ..... است.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1400)

چ) اگر تابع  $f$  در  $x = a$  مشتق پذیر باشد، آنگاه  $f$  در  $a$  ..... است.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1400)

ح) اگر  $f'(5) = 2$  و  $g'(5) = -1$  در این صورت  $(2f - g)'$  برابر با ..... است.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1400)

خ) سرعت لحظه ای در  $t = 9$  برای متحرکی با معادله  $f(t) = \sqrt{t}$  حرکت برابر ..... است

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 99)

د) اگر  $f'(1) = 3$  و  $g'(1) = 5$ ، در این صورت  $(f^3 + g^2)'$  برابر با ..... است.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 99)



3: مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

(الف)

$$f(x) = (\sqrt{x} + 3x)^7$$

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1404)

(ب)

$$g(x) = \cos^3(4x)$$

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1404)

(پ)

$$f(x) = (1 + \sin 5x)^3$$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1404)

(ت)

$$g(x) = (x^3 - 5x)(\sqrt{x^2 + 1})$$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1404)

(ث)

$$f(x) = \frac{\tan x}{1 - \cos 2x}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1404)

(ج)

$$g(x) = (2x + 1)^4$$

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1404)

(چ)



$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^3 - 6x + 1}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1403)

(ح)

$$g(x) = 2 \tan x + \cos^5(2x^3)$$

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1403)

(خ)

$$f(x) = (x^3 + 1)^2(\sqrt{3x+2})$$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1403)

(د)

$$g(x) = \sin^2(3x) + \tan(x^2)$$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1403)

(ذ)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 5x}{x - 3}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1403)

(ر)

$$g(x) = (\cos x)^3(\tan x)$$

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1403)

(ز)

$$f(x) = (x^4 + 2x)(\sqrt{x})$$

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1402)



Kanoon.Ir

(ژ)

$$g(x) = 3 \tan x - \sin^3 2x$$

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1402)

(س)

$$f(x) = (5x^3 - x)^9 \sqrt{2x + 1}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1402)

(ش)

$$g(x) = \frac{4 \tan x}{3x^2 - 1}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1402)

(ص)

$$f(x) = \frac{5 \tan x}{1 - \sin x}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1402)

(ض)

$$g(x) = \cos^7 x^2$$

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1402)

(ط)

$$h(x) = (3x + 5)^6$$

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1402)

(ظ)

$$f(x) = (4x^2 - 5x)^3 (\sqrt{x} + 1)$$



(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1401)

(ع)

$$g(x) = \frac{9x + 1}{x - x^2}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1401)

(غ)

$$h(x) = \sin(3x^2)$$

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1401)

(ف)

$$f(x) = (-3x^2 + x)^5(2x)$$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1401)

(ق)

$$g(x) = 5 \tan x + \sin x^2$$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1401)

(ک)

$$h(x) = \frac{2}{x}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1401)

(گ)

$$f(x) = \sqrt{7x}(3x^2 + 2)$$

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1401)

(ل)



$$g(x) = \cos^3(2x) - \frac{1}{x}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1401)

(م)

$$f(x) = \frac{4 \sin \frac{x}{2}}{x^2 + \sqrt{x}}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1400)

(ن)

$$g(x) = 3x(x^2 - 6x)^3 + \cos 2x$$

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1400)

(و)

$$f(x) = (\sqrt{3x} + 1)(2x^3 - 1)$$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1400)

(ه)

$$g(x) = 3 \tan^2 x + \cos x^2$$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1400)

(ی)

$$h(x) = \frac{x^2 - 3x}{5x}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1400)

(الف الف)



$$f(x) = (x^2 - 6)^3 \left( \frac{1}{4}x + 1 \right)$$

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1400)

الف ب)

$$g(x) = \sin^3(5x)$$

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1400)

الف پ)

$$h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3 - 2x + 1}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1400)

الف ت)

$$f(x) = (\sqrt{3x + 2})(x^3 + 1)$$

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 99)

الف ث)

$$g(x) = (x^2 + 3x + 1)^7$$

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 99)

الف ج)

$$h(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{-2x + 9}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 99)

الف چ)



$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 99)

الف ح)

$$g(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 5)$$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 99)

الف خ)

$$h(x) = \sin^3 x + \cos^2 x$$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 99)

الف د)

$$f(x) = (4x^3 - 7)(2x - 1)^4$$

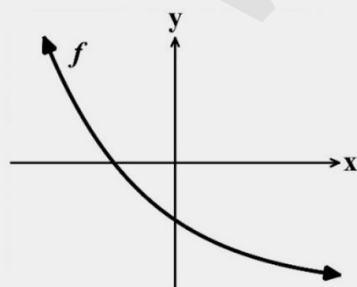
(امتحان نهایی حسابان 2 دی 99)

الف ذ)

$$g(x) = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 99)

4:



نمودار تابع  $f$  در شکل روبه‌رو رسم شده است. اگر  $f'$  و  $f''$  به ترتیب مشتق اول و دوم این تابع باشند، آن‌گاه به ازای هر  $x$  از دامنهٔ تابع  $f$ ، کدام گزینه درست است؟

۱)  $f'(x) < 0$  و  $f''(x) < 0$       ۲)  $f'(x) < 0$  و  $f''(x) > 0$

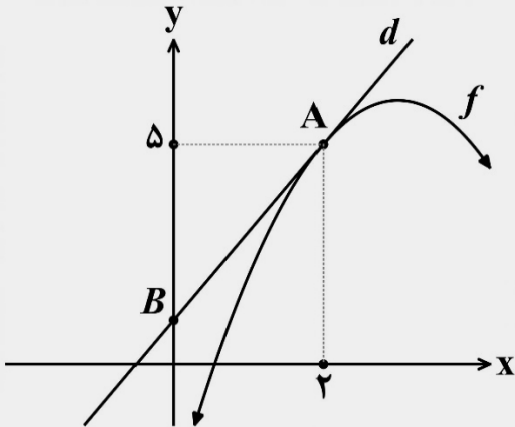
۳)  $f'(x) > 0$  و  $f''(x) < 0$       ۴)  $f'(x) > 0$  و  $f''(x) > 0$



(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1404)

5:

در شکل زیر، خط  $d$  بر نمودار تابع  $f$  در نقطه  $A = (2, 5)$  مماس است. اگر  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{h} = -2$ ، آن گاه معادله خط  $d$  و عرض نقطه  $B$  را به دست آورید.



(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1404)

6: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع  $f(x) = x|x - 1|$  را در نقطه  $x=1$  بررسی کنید.

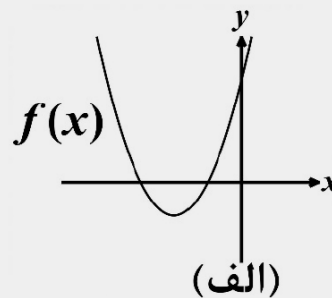
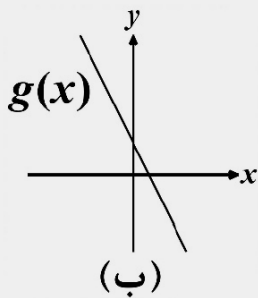
(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1404)

7:

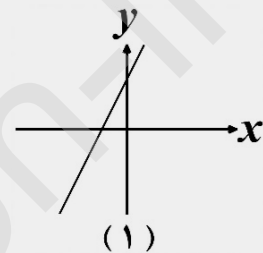
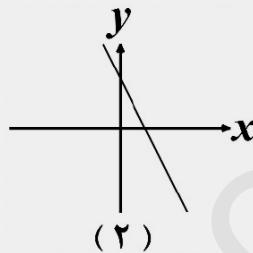
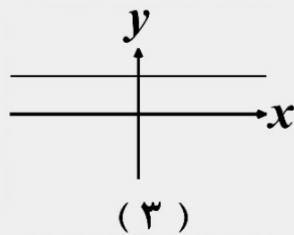
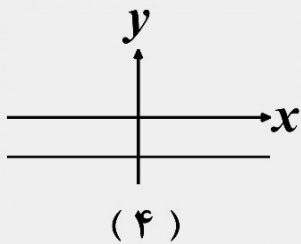


Kanoon.Ir

نمودار توابع  $f$  و  $g$  به صورت زیر است.

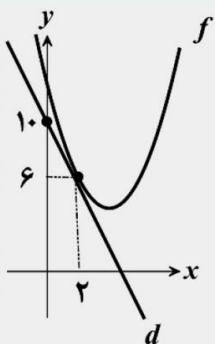


نمودار مشتق هر کدام از توابع  $f$  و  $g$  را از بین نمودارهای زیر انتخاب کنید. سپس شماره مربوط به آن را در پاسخ برگ بنویسید. (دو نمودار اضافه است.)



(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1404)

8:



مطابق شکل روبه‌رو، خط  $d$  بر نمودار تابع  $f$  در نقطه  $(2, 6)$  مماس است.

حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{3h}$  را به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1404)

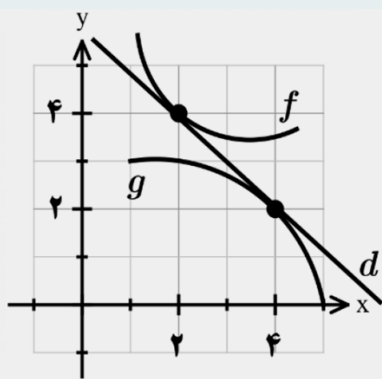
9:

به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 4x & x < 1 \end{cases}$  را در نقطه  $x = 1$  بررسی کنید.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1404)

10:





در شکل روبرو نمودار توابع  $f$  و  $g$  رسم شده و خط  $d$  بر هر دو نمودار مماس

است. مقدار  $\frac{g'(4)}{g(4)f'(2)}$  را به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1404)

11: مشتق دوم تابع  $f(x) = 3 \sin(4x) + 1$  را در نقطه  $\frac{\pi}{12}$  به دست آورید

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1404)

12: تابع  $f(x) = |4 - x^2|$  را در نظر بگیرید. با استفاده از تعریف مشتق شیب نیم مماس چپ تابع را در نقطه  $x = -2$  محاسبه کنید.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1404)

13:

اگر  $f(2) = 7$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{2x - 4} = 5$  باشد، مشتق تابع  $g(x) = x f(x)$  را در  $x = 2$  به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1403)

14:

اگر  $f(x) = |x|(x - 2)$  به کمک تعریف مشتق مشتق پذیری تابع  $f$  را در نقطه  $x = 0$  بررسی کنید.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1403)

15:



مشتق پذیری تابع  $f(x) = \begin{cases} |x| & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$  را در نقطه  $x = 0$  به کمک تعریف مشتق بررسی کنید.

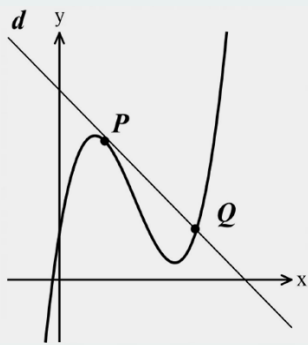
(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1403)

16:

اگر  $f'(1) = 3$ ،  $g'(1) = 5$  و  $f(1) = 1$ ، مقدار مشتق  $(f+g) \circ f$  در  $x=1$  را به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1403)

17:



مطابق شکل روبه رو خط  $d$  در نقطه  $P(1, 3)$  بر نمودار تابع  $f$  مماس و در نقطه  $Q(2a+1, a)$  آن را قطع می کند. اگر  $f'(1) = -1$ ، مقدار  $a$  را بیابید.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1403)

18: مشتق پذیری تابع  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$  را در نقطه  $x = 2$  با استفاده از تعریف مشتق بررسی کنید.

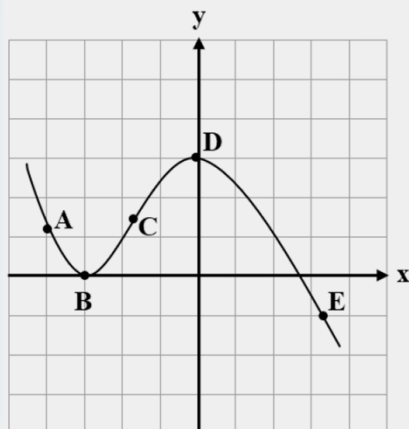
(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1403)

19: تابع  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$  مفروض است. در نقطه  $x = a$ ، آهنگ تغییر لحظه ای تابع کمتر از آهنگ تغییر متوسط آن در بازه  $[0, 3]$  است، محدوده  $a$  را بیابید.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1403)



با توجه به نمودار تابع مقابل:



- الف) در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع منفی است؟  
 ب) در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع برابر صفر است؟  
 پ) در بین نقاط داده شده کدام نقطه بیشترین شیب را دارد؟  
 ت) شیب نقاط D و A را با هم مقایسه نمایید.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1402)

21: با استفاده از تعریف مشتق تابع، مشتق پذیری تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$  را در نقطه  $x = 2$  بررسی کنید.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1402)

22: تابعی با ضابطه  $f(x) = \frac{3x-6}{x^2+2}$  را در نظر بگیرید:

الف) آهنگ تغییر متوسط در بازه  $[-2, 5]$  را به دست آورید.

ب) آهنگ تغییر لحظه ای در  $x = -1$  را به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1402)

23

مشتق پذیری تابع  $f(x) = \begin{cases} 3x-4 & x < 1 \\ 2x^2-3 & x \geq 1 \end{cases}$  را در نقطه  $x = 1$  بررسی کنید.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1402)

24: با استفاده از تعریف مشتق نشان دهید اگر  $f(x) = \sqrt{x}$  و  $x > 0$  آنگاه:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$



(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1402)

25: اگر  $f(x) = \cos 2x$  باشد مقدار  $f''\left(\frac{\pi}{8}\right)$  را به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1402)

26: در تابعی با ضابطه  $f(t) = \frac{120}{t} + 5$  مجموع آهنگ لحظه ای تغییر در لحظه  $t = 2$  و آهنگ متوسط تغییر تابع  $f(t)$  در بازه  $[4, 6]$  را بیابید.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1402)

27:

تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \leq 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$  را در نظر بگیرید. مشتق پذیری تابع را در نقطه  $x = 1$  بررسی کنید.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1402)

28:

اگر  $f(x) = 2x^3 + 1$  و  $g(x) = \sqrt{x}$  باشند. حاصل  $(f + g)'(4) + (f \times g)'(1)$  را به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1402)

29: آهنگ تغییر متوسط تابع  $f(x) = \sqrt{x + 5}$  را وقتی متغیر از  $x = -1$  به

$x = 4$  تغییر می کند را به دست آورید

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1402)

30:

مشتق پذیری تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases}$  را در  $x = 1$  بررسی کنید.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1401)



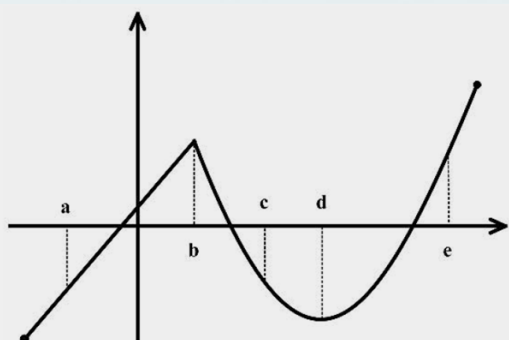
با در نظر گرفتن نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل از بین نقاط

مشخص شده مطلوب است طول نقطه ای که :

الف) تابع در آن مشتق پذیر نیست .

ب) مماس در آن موازی محور طول هاست .

پ) مشتق و مقدار تابع در آن مثبت است.



(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1401)

32: معادله حرکت متحرکی به صورت  $f(t) = 2t^2 - t + 3$  بر حسب متر است.

( $t$  بر حسب ثانیه است.)

الف) سرعت متوسط تابع در بازه  $[0, 3]$  را به دست آورید.

ب) سرعت لحظه ای تابع را در  $t = 4$  به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1401)

33: مشتق پذیری تابع  $f(x) = |2x - 4|$  را  $x = 2$  بررسی کنید

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1401)

34: برای تابع  $f(x) = x^3 - 8$  در نقطه تقاطع آن با محور  $x$  ها معادله خط مماس را

بنویسید.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1401)

35: اگر سرعت متوسط یک متحرک در یک بازه برابر ۲ متر بر ثانیه باشد و معادله

حرکت متحرک به صورت  $f(t) = t^3 - t$  بر حسب متر باشد. در کدام لحظه،

سرعت لحظه ای متحرک برابر سرعت متوسط آن است؟

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1401)

36: معادله خط مماس بر منحنی تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  را در نقطه ای به طول  $x = 0$  واقع

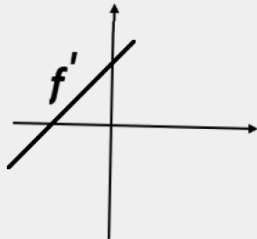
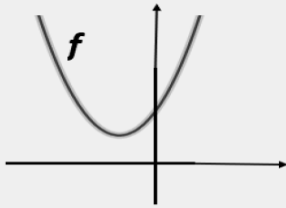
بر نمودار تابع بنویسید.



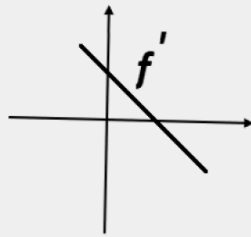
(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1401)

37:

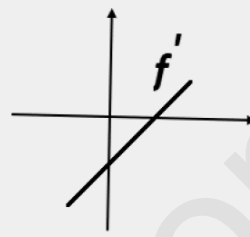
با توجه به نمودار تابع  $f$ ، نمودار  $f'$  را با ذکر دلیل مشخص کنید.



(الف)



(ب)



(ت)



(پ)

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1401)

38: یک توده باکتری پس از  $t$  ساعت دارای جرم  $m(t) = \sqrt{t} + 2t$  گرم است. در چه لحظه ای، آهنگ رشد جرم توده باکتری برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه زمانی  $0 \leq t \leq 4$  می شود؟

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1401)

39: مشتق پذیری تابع  $f(x) = 4x(1 - |x|)$  را در بررسی کنید

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1400)

40: تابعی با ضابطه  $f(t) = \frac{240}{t}$  مفروض است. آهنگ لحظه ای تغییر تابع  $f$  در لحظه  $t = 2$  از آهنگ متوسط تغییر تابع  $f$  از لحظه  $t = 3$  تا  $t = 5$  چه مقدار بیشتر است؟

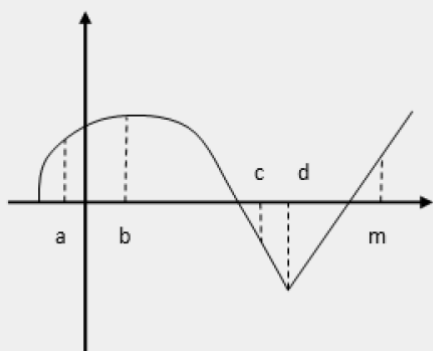
(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1400)

41: خط مماس بر منحنی تابع  $f(x) = x^3 - 2x$  را در نقطه  $A(1, f(1))$  به دست آورید

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1400)



با توجه به نمودار  $f'$  به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) طول نقطه ای که مشتق در آن صفر است را بنویسید.

ب) طول نقطه "گوشه ای" را بنویسید.

پ) طول نقطه ای که در آن مقدار تابع و شیب خط هر دو منفی است، را بنویسید.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1400)

43: جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پر تاپ می کنیم. جهت حرکت به طرف

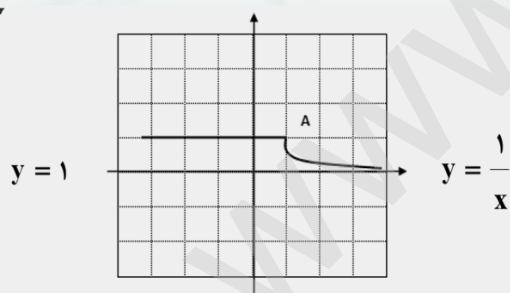
بالا را مثبت در نظر می گیریم. فرض کنید ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله  $h(t) = -5t^2 + 40t$  به دست می آید. مطلوب است:

الف) سرعت متوسط در بازه  $[1, 2]$

ب) سرعت لحظه ای در زمان  $t = 3$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1400)

با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع رسم شده مقابل ؛  
مشتق پذیری تابع را در نقطه  $(1, A)$  بررسی کنید.



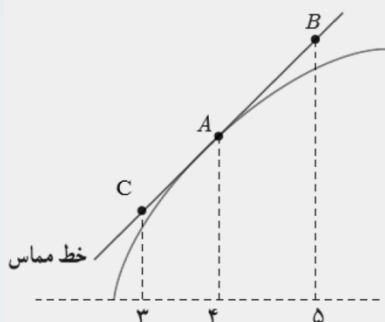
(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1400)

در تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ x+2 & x \geq -1 \end{cases}$  نشان دهید  $f'_+(-1)$  و  $f'_-(-1)$  موجودند، ولی  $f'(-1)$  موجود نیست.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1400)



برای تابع  $f$  در شکل مقابل داریم:  $f'(4) = 1/5$  و  $f(4) = 25$   
با توجه به شکل مختصات نقاط  $B$  و  $C$  را بیابید.



(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1400)

47: دوچرخه سواری طبق معادله  $d(t) = \frac{1}{3}t^3 + 10t$  حرکت می کند. که در آن

$0 \leq t \leq 6$  بر حسب ثانیه است.

سرعت لحظه ای در  $t = 2$  چقدر است.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1400)

48: اگر  $f(x) = x^2 - 3x$  باشد، با استفاده از تعریف مشتق  $f'(1)$  را حساب کنید

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 99)

49: اگر  $f(x) = \sin^2 x - \cos 2x$  باشد، مقدار  $f''(\frac{\pi}{6})$  را حساب کنید

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 99)

مشتق پذیری تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$  را در  $x = 0$  بررسی کنید.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 99)

51: معادله خط مماس بر منحنی تابع  $f(x) = -x^2 + 10x$  را در نقطه  $A(2, f(2))$  واقع بر نمودار

تابع بنویسید.



(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 99)

52: معادله حرکت متحرکی به صورت  $f(t) = t^2 - t + 10$  بر حسب متر در بازه زمانی  $[0, 5]$

داده شده است. در کدام لحظه در این بازه، سرعت لحظه ای با سرعت متوسط با هم برابرند؟

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 99)

53: مشتق پذیری تابع  $f(x) = |x^2 - 1|$  را در  $x = 1$  بررسی کنید.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 99)

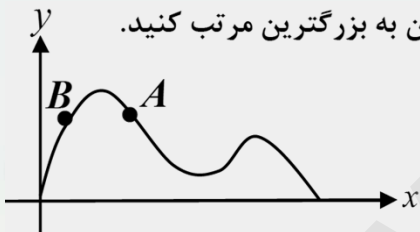
54:

مشتق پذیری تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$  را در نقطه  $x = 1$  بررسی کنید.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 99)

55:

در نمودار  $y = f(x)$  شیب نمودار در نقاط A, B و شیب خط AB را، از کوچکترین به بزرگترین مرتب کنید.



(امتحان نهایی حسابان 2 دی 99)

56: جسمی از سطح زمین به طور عمودی پرتاب شده است، که معادله ارتفاع آن از سطح زمین به صورت

$f(t) = -2t^2 + 10t$  می باشد. سرعت لحظه ای این جسم را در  $t=2$  به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 99)



Kanoon.Ir

# پاسخنامه

1: الف) درست ب) نادرست پ) نادرست ت) نادرست ث) درست ج) نادرست چ) نادرست

ح) نادرست خ) درست د) نادرست ذ) درست ر) نادرست ز) درست ژ) نادرست

2: الف) صفر ب) 2 پ) -9 ت) -1 ث) نباشد ج) 18 چ) پیوسته ح) 5 خ)  $\frac{1}{6}$  د) 19

3:

الف)

$$f'(x) = \underbrace{(7)}_{(0/25)} \left( \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{(0/25)} + \underbrace{3}_{(0/25)} \right) \underbrace{(\sqrt{x} + 3x)^6}_{(0/25)}$$

ب)

$$g'(x) = \underbrace{(3)(4)}_{(0/25)} \underbrace{(-\sin 4x)}_{(0/25)} \underbrace{(\cos^2 4x)}_{(0/25)}$$

پ)

$$f'(x) = \underbrace{(3)}_{(0/25)} \underbrace{(5 \cos 5x)}_{(0/25)} \underbrace{(1 + \sin 5x)^2}_{(0/25)}$$

ت) هر دو روش بالا و پایین نمره دارد



$$g'(x) = \overbrace{(3x^2 - 5)}^{(\circ/\Delta)} \overbrace{(\sqrt{x^2 + 1})}^{(\circ/\Delta)} + \overbrace{\left(\frac{3x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right)}^{(\circ/\Delta)} \overbrace{(x^2 - 5x)}^{(\circ/\Delta)}$$

$$g'(x) = \overbrace{(3x^2 - 5)}^{(\circ/\Delta)} \overbrace{(\sqrt{x^2 + 1})}^{(\circ/\Delta)} + \overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}^{(\circ/\Delta)} \overbrace{(3x)(x^2 + 1)}^{(\circ/\Delta)} \overbrace{2}^{(\circ/\Delta)} \overbrace{(x^2 - 5x)}^{(\circ/\Delta)}$$

(ث)

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(1 + \tan^2 x)}^{(\circ/\Delta)} \overbrace{(1 - \cos(2x))}^{(\circ/\Delta)} - \overbrace{(2 \sin(2x))}^{(\circ/\Delta)} \overbrace{\tan x}^{(\circ/\Delta)}}{\underbrace{(1 - \cos(2x))^2}_{(\circ/\Delta)}}$$

(ج)

$$g'(x) = \overbrace{2}^{(\circ/\Delta)} \overbrace{(2)}^{(\circ/\Delta)} \overbrace{(2x + 1)^2}^{(\circ/\Delta)}$$

(د)

$$f'(x) = \frac{\overbrace{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}^{(\circ/\Delta)} \overbrace{(x^2 - 6x + 1)}^{(\circ/\Delta)} - \overbrace{(2x^2 - 6)\sqrt{x+1}}^{(\circ/\Delta)}}{\underbrace{(x^2 - 6x + 1)^2}_{(\circ/\Delta)}}$$

(هـ)

$$g'(x) = \overbrace{2(1 + \tan^2 x)}^{(\circ/\Delta)} \overbrace{+}^{(\circ/\Delta)} \overbrace{(2)}^{(\circ/\Delta)} \overbrace{(6x^2)}^{(\circ/\Delta)} \overbrace{(-\sin(2x^2))}^{(\circ/\Delta)} \overbrace{\cos^2(2x^2)}^{(\circ/\Delta)}$$

(و)



$$f'(x) = \underbrace{2 \times 3x^2 (x^3 + 1)}_{(0/25)} \underbrace{(\sqrt{3x+2})}_{(0/25)} + \underbrace{\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}}_{(0/25)} \underbrace{(x^3 + 1)^2}_{(0/25)}$$

(د)

$$g'(x) = \underbrace{2 \times 3 \times \cos 3x \sin 3x}_{(0/5)} + \underbrace{2x(1 + \tan^2(x^2))}_{(0/5)}$$



(اگر دانش آموزی به صورت  $3 \sin 6x$  بنویسد، (0/5) نمره بارم این قسمت تعلق گیرد.)

(ذ)

$$f'(x) = \frac{\underbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 5\right)(x-3)}_{0/25} - \underbrace{(1)(\sqrt{x} - 5x)}_{0/25}}{\underbrace{(x-3)^2}_{0/25}}$$

(ر)

$$g'(x) = \underbrace{(3(-\sin x) \cos^2 x)(\tan x)}_{0/5} + \underbrace{(\cos^2 x)(1 + \tan^2 x)}_{0/5}$$

ز

$$f'(x) = \underbrace{(4x^2 + 2)(\sqrt{x})}_{(0/5)} + \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + 2x)}_{(0/5)}$$

ژ

$$g'(x) = \underbrace{3(1 + \tan^2 x)}_{(0/25)} - \underbrace{6 \sin^2 2x \cos 2x}_{(0/75)}$$



(س)

$$f'(x) = \overbrace{9(15x^2 - 1)(5x^3 - x)^4(\sqrt{2x+1})}^{(\cdot/\Delta)} + \overbrace{\left(\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}\right)(5x^3 - x)^9}^{(\cdot/\Delta)}$$

(ش)

$$g'(x) = \frac{\overbrace{4(1 + \tan^2 x)(3x^2 - 1)}^{(\cdot/\Delta)} - \overbrace{(2x) \times (4 \tan x)}^{(\cdot/2\Delta)}}{\underbrace{(3x^2 - 1)^2}_{(\cdot/2\Delta)}}$$

(ص)

$$f'(x) = \frac{\overbrace{\Delta(1 + \tan^2 x)(1 - \sin x)}^{(\cdot/\Delta)} - \overbrace{(-\cos x)(\Delta \tan x)}^{(\cdot/\Delta)}}{\underbrace{(1 - \sin x)^2}_{(\cdot/2\Delta)}}$$

(ض)

$$g'(x) = -\sqrt{\cos^2(x^2)} \times 2x \times \sin(x^2)$$

(ط)

$$h'(x) = 6 \times 3 \times (3x + 5)^5$$

(ظ)

$$f'(x) = \underbrace{3(4x^2 - 5x)^2(8x - 5)(\sqrt{x} + 1)}_{(\cdot/7\Delta)} + \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}(4x^2 - 5x)^2}_{(\cdot/\Delta)}$$

(ع)

$$g'(x) = \frac{\overbrace{9(x - x^2)}^{(\cdot/2\Delta)} - \overbrace{(1 - 2x)(9x + 1)}^{(\cdot/\Delta)}}{\underbrace{(x - x^2)^2}_{(\cdot/2\Delta)}}$$



(غ)

$$h'(x) = 9x \cos(3x^2)$$

(ف)

$$f'(x) = \overbrace{5(-6x+1)(-3x^2+x)^6(2x)}^{(./\gamma\delta)} + \overbrace{(2)(-3x^2+x)^5}^{(./\gamma\delta)}$$

(ق)

$$g'(x) = \underbrace{5(1+\tan^2 x)}_{(./\delta)} + \underbrace{2x}_{(./\gamma\delta)} \underbrace{\cos x^2}_{(./\gamma\delta)}$$

(ك)

$$h'(x) = \frac{\overbrace{-2}^{(./\gamma\delta)}}{\underbrace{x^2}_{(./\gamma\delta)}}$$

(گ)

$$f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{2x}} \underbrace{(2x^2+2)}_{(./\delta)} + \underbrace{\sqrt{2x}(6x)}_{(./\delta)}$$

(ل)

$$g'(x) = \underbrace{2(-2\sin 2x)(\cos^2 2x)}_{(./\gamma\delta)} - \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{(./\delta)}$$

(م)

$$f'(x) = \frac{\overbrace{\left(2\cos \frac{x}{2}\right)(x^2+\sqrt{x})}^{(./\gamma\delta)} \overbrace{-\left(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(2\sin \frac{x}{2})}^{(./\delta)}}{\underbrace{(x^2+\sqrt{x})^2}_{(./\gamma\delta)}}$$



Kanoon.Ir

(ن)

$$g'(x) = \underbrace{3 \times (x^r - 6x)}_{\cdot/5} + \underbrace{\left( 3 \times (2x - 6)(x^r - 6x)^r \right)}_{\cdot/5} \times \underbrace{3x - 2 \sin 2x}_{\cdot/5}$$

(و)

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x}}(2x^r - 1) + (\sqrt{3x} + 1)(6x^r)$$

(هـ)

$$g'(x) = 6 \tan x(1 + \tan^r x) + 2x(-\sin x^r)$$

(ی)

$$h'(x) = \frac{(2x - 3)(5x) - (5)(x^r - 3x)}{(5x)^r}$$

(الف الف)

$$f'(x) = \overbrace{3(2x)(x^r - 6)^r}^{(\cdot/5)} \left( \frac{1}{4}x + 1 \right) + \overbrace{\frac{1}{4}(x^r - 6)^r}^{(\cdot/25)}$$

(الف ب)

$$g'(x) = \underbrace{15}_{(\cdot/25)} \underbrace{\sin^r(5x)}_{(\cdot/25)} \underbrace{\cos(5x)}_{(\cdot/25)}$$

(الف پ)



$$h'(x) = \frac{\overbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x^2 - 2x + 1)}^{(./\Delta)} - \overbrace{(2x^2 - 2)(\sqrt{x})}^{(./\Delta)}}{\underbrace{(x^2 - 2x + 1)^2}_{(./\Delta)}}$$

الف ت

$$f'(x) = \underbrace{\left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)(x^2 + 1)}_{(./\Delta)} + \underbrace{(2x^2)(\sqrt{3x+2})}_{(./\Delta)}$$

الف ث

$$g'(x) = \underbrace{2(2x+3)(x^2 + 2x + 1)^2}_{(./\Delta)}$$

الف ج

$$h'(x) = \frac{\overbrace{(2x-5)(-2x+9) - (-2)(x^2 - 5x + 7)}^{(./\Delta)}}{\underbrace{(-2x+9)^2}_{(./\Delta)}}$$

الف چ

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(2x-3)(-2x+2) - (-3)(x^2 - 2x + 1)}^{(./\Delta)}}{\underbrace{(-2x+2)^2}_{(./\Delta)}}$$

الف ح

$$g'(x) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x^2 + 5)}_{(./\Delta)} + \underbrace{\sqrt{x}(6x)}_{(./\Delta)}$$



الف خ)

$$h'(x) = \underbrace{3 \times \sin^2 x \times \cos x}_{(0/5)} + \underbrace{2 \cos x \times (-\sin x)}_{(0/5)}$$

الف د)

$$f'(x) = \underbrace{(12x^2)(2x-1)^4}_{(0/5)} + \underbrace{4(2x-1)^3(2)(4x^2-7)}_{(0/5)}$$

الف ذ)

$$g'(x) = \frac{\overbrace{-\cos x (\cos x)}^{(0/25)} - \overbrace{(-\sin x)(1 - \sin x)}^{(0/5)}}{\underbrace{\cos^2 x}_{(0/25)}}$$

4: گزینه 2

5:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{h} = -f'(2) \quad (0/25) \Rightarrow m = f'(2) = 2 \quad (0/25)$$

صفحه ۷۸

عرض نقطه B : ۱ (0/25)

معادله خط d :  $y = 2x + 1$  (0/25)

6:



Kanoon.Ir

$$\begin{cases} f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1 & (\circ / \Delta) \\ f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x(x-1)}{x-1} = -1 & (\circ / \Delta) \end{cases}$$

روش اول:

با توجه به اینکه  $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ ، نتیجه می‌شود که تابع  $f$  در نقطه  $x=1$  مشتق پذیر نیست. ( $\circ / \Delta$ )

روش دوم:

$$\begin{cases} f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1+h)|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (1+h) = 1 & (\circ / \Delta) \\ f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -(1+h) = -1 & (\circ / \Delta) \end{cases}$$

با توجه به اینکه  $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ ، نتیجه می‌شود که تابع  $f$  در نقطه  $x=1$  مشتق پذیر نیست. ( $\circ / \Delta$ )

توضیحات نمره‌گذاری: اگر فقط به جمله «تابع  $f$  در نقطه  $x=1$  مشتق پذیر نیست.» اشاره شود، ( $\circ / \Delta$ ) تعلق گیرد.

7: الف) نمودار شماره 1 ب) نمودار شماره 4

8:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{3h} = \underbrace{\frac{-1}{3}}_{(\circ / \Delta)} \underbrace{f'(2)}_{(\circ / \Delta)} = \underbrace{\frac{-1}{3} \left( \frac{6-10}{2-0} \right)}_{(\circ / \Delta)} = \underbrace{\frac{2}{3}}_{(\circ / \Delta)}$$

9:

روش اول: (صفحه ۱۰۰)

$$\begin{cases} f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 & (\circ / \Delta) \\ f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x - 4}{x - 1} = 4 & (\circ / \Delta) \end{cases}$$

با توجه به اینکه  $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ ، نتیجه می‌شود که تابع  $f$  در نقطه  $x=1$  مشتق پذیر نیست. ( $\circ / \Delta$ )



$$\left\{ \begin{array}{l} \overbrace{f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}}^{(0/25)} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1+h)^2 + 3 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h + 2 = 2 \quad (0/25) \\ \overbrace{f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}}^{(0/25)} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{4(1+h) - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{4h}{h} = 4 \quad (0/25) \end{array} \right.$$

با توجه به اینکه  $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ ، نتیجه می‌شود که تابع  $f$  در نقطه  $x = 1$  مشتق‌پذیر نیست. (0/25)

توضیحات جهت نمره‌گذاری: اگر از طریق رسم نمودار و مشخص کردن نقطه گوشه‌ای جواب حاصل شود یا از طریق استفاده از دستورهای مشتق (قضیه‌های مشتق‌گیری)، مشتق‌ناپذیر بودن تابع در  $x = 1$  مشخص شود (0/5) نمره تعلق گیرد. اگر فقط به جمله (تابع  $f$  در نقطه  $x = 1$  مشتق‌پذیر نیست.) اشاره کند، (0/25) نمره تعلق گیرد.

:10

$$\text{شیب خط مماس} = \frac{4-2}{2-4} = -1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{g'(4) = -1}^{(0/25)} \\ \overbrace{f'(2) = -1}^{(0/25)} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{g'(4)}{g(4)f'(2)} = \frac{1}{2} \quad (0/25)$$

:11

$$\overbrace{f'(x) = 12 \cos(4x)}^{(0/25)} \Rightarrow \overbrace{f''(x) = -48 \sin(4x)}^{(0/25)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{f''\left(\frac{\pi}{12}\right) = -48 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -24\sqrt{3}}_{(0/25)}$$

:12



$$m = f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{|4 - x^2| - 0}{x + 2}$$

روش اول :

$$= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x - 2}{1} = -4$$

$$m = f'_-(-2) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|4 - (-2+h)^2| - 0}{h}$$

روش دوم :

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h - 4 = -4$$

ص ۸۶ و ۸۷

:13

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{1}{2} f'(2) = 5 \quad (0/0) \Rightarrow f'(2) = 10 \quad (0/0)$$

$$g'(x) = 1 \times f(x) + x \times f'(x) \Rightarrow g'(2) = 1 \times 7 + 2 \times 10 = 27$$

:14

$$f'(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{|x|(x-2) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \begin{cases} f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{-x(x-2) - \cdot}{x} = +2 \quad (0/0) \\ f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{x(x-2) - \cdot}{x} = -2 \quad (0/0) \end{cases}$$

چون  $f'_-(\cdot) \neq f'_+(\cdot)$ ، لذا تابع  $f$  در  $x = 0$  مشتق پذیر نیست. (صفحه ۸۶)

:15



روش اول:

$$\left. \begin{aligned} f'_-(\circ) &= \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{f(x) - f(\circ)}{x - \circ} = \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{|x| - \circ}{x} = -1 \quad (\circ/5) \\ f'_+(\circ) &= \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{f(x) - f(\circ)}{x - \circ} = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{x^2 - \circ}{x} = \circ \quad (\circ/5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_-(\circ) \neq f'_+(\circ) \text{ مشتق ناپذیر } (\circ/5)$$

روش دوم:

$$\left. \begin{aligned} f'_-(\circ) &= \lim_{h \rightarrow \circ^-} \frac{f(\circ+h) - f(\circ)}{h} = \lim_{h \rightarrow \circ^-} \frac{|h| - \circ}{h} = -1 \quad (\circ/5) \\ f'_+(\circ) &= \lim_{h \rightarrow \circ^+} \frac{f(\circ+h) - f(\circ)}{h} = \lim_{h \rightarrow \circ^+} \frac{h^2 - \circ}{h} = \circ \quad (\circ/5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_-(\circ) \neq f'_+(\circ) \text{ مشتق ناپذیر } (\circ/5)$$

(صفحه ۱۰۱)

16:

روش اول:  $((f+g) \circ f)'(1) = \underbrace{f'(1) \times (f+g)'(f(1))}_{(\circ/25)} = \underbrace{f'(1) \times (f'(1) + g'(1))}_{(\circ/5)} = 3 \times (3+5) = 24$

روش دوم:  $((f+g) \circ f)'(1) = \underbrace{(f \circ f)'(1)}_{(\circ/25)} + \underbrace{(g \circ f)'(1)}_{(\circ/25)} = f'(1) \times f'(f(1)) + f'(1) \times g'(f(1)) \quad (\circ/25)$

$$= 3 \times 3 + 3 \times 5 = 24 \quad (\circ/25)$$

17:

خط  $d$  در نقطه  $P(1,3)$  بر تابع  $f(x)$  مماس است، بنابراین شیب خط  $d$  برابر  $-1$  است.  $(\circ/25)$

روش اول: معادله خط  $d$  بصورت زیر است:

$$y - 3 = -1(x - 1) \Rightarrow \underbrace{y = -x + 4}_{\circ/25} \xrightarrow{Q(2a+1, a) \in d} \underbrace{a = -2a - 1 + 4}_{\circ/25} \Rightarrow a = 1 \quad (\circ/25)$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a - 3}{\underbrace{2a + 1 - 1}_{(\circ/5)}} = -1 \Rightarrow a = 1 \quad (\circ/25)$$

روش دوم:

(صفحه ۸۳)

18:



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \underbrace{\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 0}{x - 2}}_{\text{۰/۲۵}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)}{x - 2} = -1 & (\text{۰/۲۵}) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} = 1 & (\text{۰/۲۵}) \end{cases}$$

پس  $f(x)$  در  $x = 2$  مشتق پذیر نیست. (۰/۲۵) (صفحه ۸۶)

19:

$$\underbrace{\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0}}_{\text{۰/۲۵}} = \frac{-2 - 1}{3} = -1 \quad (\text{۰/۲۵}) \quad \text{آهنگ متوسط تغییر در بازه } [0, 3]:$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر  $f'(x) = x^2 - 4$  است.  $\text{۰/۲۵}$

$$f'(a) < -1 \Rightarrow \underbrace{a^2 - 4 < -1}_{\text{۰/۲۵}} \Rightarrow a^2 < 3 \Rightarrow \underbrace{-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}}_{\text{۰/۲۵}} \quad (\text{صفحه ۱۱۰})$$

20: الف) E ب) B پ) C ت)  $m_D > m_A$

21:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \underbrace{\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}}_{\text{۰/۲۵}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x - 2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{(x - 2)^2}}}_{\text{۰/۲۵}} = +\infty \quad (\text{۰/۲۵})$$

تابع در نقطه  $x = 2$  مشتق پذیر نیست. (۰/۲۵)

22:

$$\text{الف) } \frac{f(0) - f(-2)}{0 + 2} = \frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2} \quad (\text{۰/۷۵})$$

$$\text{ب) } f'(x) = \frac{-3x^2 + 12x + 6}{(x^2 + 2)^2} \Rightarrow f'(-1) = -1 \quad (\text{۰/۷۵})$$

23:



تابع پیوسته است (۰/۲۵)

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 3 + 1}{x-1} = 4 \quad (۰/۵)$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 4 + 1}{x-1} = 3 \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1) \quad \text{در نقطه } x=1 \text{ مشتق ناپذیر است} \quad (۰/۲۵)$$

(در صورت استفاده از فرمول های دیگر مشتق، برای محاسبه مشتق چپ و راست، بارم به تناسب تقسیم شود.)

:24

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{(۰/۲۵)} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}}_{(۰/۲۵)} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}}_{(۰/۲۵)} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}}_{(۰/۲۵)} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}}_{(۰/۲۵)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(در صورت استفاده از فرمول های دیگر مشتق، بارم به تناسب تقسیم شود.)

:25

$$f'(x) = -2 \sin 2x \Rightarrow f''(x) = -4 \cos 2x \quad (۰/۲۵)$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \underbrace{-4 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{(۰/۲۵)} = -4 \cdot 0 = 0 \quad (۰/۲۵)$$

:26

$$f'(t) = \frac{-120}{t^2} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow f'(2) = \frac{-120}{4} = -30 \quad (۰/۲۵)$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{\left(\frac{120}{6} + 5\right) - \left(\frac{120}{4} + 5\right)}{6 - 4} = \frac{25 - 35}{2} = -5 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow -30 - 5 = -35 \quad (۰/۲۵)$$

:27



$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1-2}{x-1} = 1 \quad (0/5)$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+x-2}{x-1} = 3 \quad (0/5)$$

$f'_+(1) \neq f'_-(1)$  در نتیجه تابع در  $x=1$  مشتق پذیر نیست. (0/25)

28

$$(f+g)'(4) = f'(4) + g'(4) = \underbrace{(6(4)^2)}_{(0/25)} + \frac{1}{2\sqrt{4}} = 96 + \frac{1}{4} \quad (0/25)$$

$$f'(1)g(1) + g'(1)f(1) = \underbrace{(6)(1) + \left(\frac{1}{2}\right)(3)}_{(0/25)} = 6 + \frac{3}{2} \quad (0/25)$$

$$(f+g)'(4) + (f \times g)'(1) = 96 + \frac{1}{4} + 6 + \frac{3}{2} = \frac{415}{4} \quad (0/5)$$

29

$$\frac{f(4) - f(-1)}{\underbrace{4 - (-1)}_{(0/25)}} = \frac{3 - 2}{\underbrace{5}_{(0/25)}} = \frac{1}{5} \quad (0/25)$$

30

مشابه تمرین ۶ صفحه ۱۰۰

تابع در  $x=1$  پیوسته است. (0/25)

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+1-2}{x-1} = 2 \quad (0/5), \quad f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-1-2}{x-1} = 3 \quad (0/5)$$

$f'_+(1) \neq f'_-(1)$  پس تابع در  $x=1$  مشتق پذیر نمی باشد. (0/25)

31

(الف)  $b$  (0/25)

(ب)  $d$  (0/25)

(پ)  $e$  (0/25)

32



$$\text{الف) } \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{18 - 3}{3} = 5$$

$$\text{ب) } f'(t) = 4t - 1 \Rightarrow f'(4) = 15$$

:33

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2x-4|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2 \quad (0/5)$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2x-4|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x-2)}{x-2} = -2 \quad (0/5)$$

$\Rightarrow \underbrace{f'_+(2) \neq f'_-(2)}_{(0/25)}$  تابع در این نقطه مشتق پذیر نمی باشد. (0/25)

(در صورت استفاده از تعریف قدر مطلق و استفاده از فرمول برای محاسبه مشتق چپ و راست ، بارم به تناسب تقسیم شود.)

:34

$$x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 0) \quad (0/5)$$

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow m = f'(2) = 12 \quad (0/5), \quad y - 0 = 12(x - 2) \Rightarrow y = 12x - 24$$

:35

$$f'(t) = 3t^2 - 1 = 2 \quad (0/5) \Rightarrow 3t^2 = 3 \Rightarrow t = \pm 1 \Rightarrow t = 1 \quad (0/5)$$

:36

$$f'(0) = m = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty \quad (0/5), \quad A(0, 0) \quad (0/25)$$

معادله مماس قائم:  $x = 0$  (0/25)

:37

گزینه ت صحیح است. (0/25) مشتق سهمی، تابع خطی (غیر ثابت) است. (0/25) چون طول نقطه مینیمم، منفی است پس  $f'$  محور  $x$  ها را در ناحیه  $x < 0$  قطع می کند. (0/25)

:38



$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 \quad (0/5) \quad \frac{10-0}{4-0} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 = \frac{5}{2} \quad (0/25) \Rightarrow \sqrt{t} = 1 \Rightarrow t = 1$$

:39

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 4x^2 & x \geq 0 \\ 4x + 4x^2 & x < 0 \end{cases} \quad (0/5)$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x - 4x^2}{x} = 4 \quad (0/25) \quad \Rightarrow f'_+(0) = f'_-(0) \quad (0/25)$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x + 4x^2}{x} = 4 \quad (0/25)$$

(چنانچه راه حل، از طریق بررسی شرط پیوستگی و محاسبه مشتق با فرمول باشد نمره منظور گردد.)

:40

$$\text{آهنگ لحظه ای} \Rightarrow f'(t) = \frac{-240}{t^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{-240}{16} = -15 \quad (0/5)$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{48 - 80}{2} = -16 \quad (0/5)$$

$$-15 - (-16) = 1 \quad (0/5)$$

:41

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \Rightarrow f'(1) = 1 \quad (0/5) \quad \Rightarrow y = x - 2$$

$$\Rightarrow f(1) = -1 \quad (0/25)$$

:42

$$(0/25) \quad x = c \quad \text{پ} \quad (0/25) \quad x = d \quad \text{ب} \quad (0/25) \quad x = b \quad \text{الف}$$

:43



الف)  $\frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = 25 \quad (0/5)$  سرعت متوسط

ب)  $h'(t) = -10t + 40 \Rightarrow h'(3) = 10 \quad (0/5)$  سرعت لحظه ای

44:

$$y = \begin{cases} 1 & x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & x > 1 \end{cases} \quad (0/5) \quad y'_-(1) \neq y'_+(1) \quad (0/25)$$

تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست. (0/25)

" پاسخ با استفاده از تعریف مشتق هم مورد قبول می باشد، همکاران محترم به تناسب بارم را در نظر بگیرید. "

45:

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x+2-1}{x+1} = 1 \quad (0/5) \quad \Rightarrow f'_+(-1) \neq f'_-(-1) \quad (0/25) \quad f'(-1) \text{ موجود نیست.}$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2-1}{x+1} = -2 \quad (0/5) \quad (\text{در صورت استفاده از فرمول بارم به تناسب داده شود.})$$

46:

$$A(4, 25) \Rightarrow 1/5 = \frac{y_B - 25}{5 - 4} \quad (0/5)$$

$$B(5, 26/5) \quad (0/25), \quad C(3, 23/5) \quad (0/25)$$

47:

$$d'(t) = t^2 + 10 \quad (0/5) \Rightarrow d'(2) = 14 \quad (0/5)$$

48:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \underbrace{\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}}_{(0/5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \underbrace{\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}}_{(0/5)} = -1 \quad (0/25)$$

49:



$$f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \sin 2x = 2 \sin 2x \quad (./ \Delta)$$

$$f''(x) = 4 \cos 2x \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad (./ \Delta)$$

:50

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0 \quad (./ \Delta)$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0 \quad (./ \Delta)$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1 \quad (./ \Delta)$$

$$f'_-(0) \neq f'_+(0) \quad (./ \Delta)$$

پس تابع مشتق پذیر نمی باشد

:51

$$f'(x) = -2x + 10 \quad (./ 2\Delta), \quad f'(2) = 6 \quad (./ 2\Delta), \quad f(2) = 16 \quad (./ 2\Delta)$$

$$y - 16 = 6(x - 2) \quad (./ \Delta) \Rightarrow y = 6x + 4 \quad (./ 2\Delta)$$

:52

$$f(\Delta) = 30, f(0) = 10 \Rightarrow \frac{f(\Delta) - f(0)}{\Delta - 0} = 4 \quad (./ 7\Delta)$$

$$f'(t) = 2t - 1 = 4 \Rightarrow t = \frac{5}{2} \quad (./ 7\Delta)$$

:53

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2 \quad (./ 7\Delta)$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = -2 \quad (./ 7\Delta)$$

$$f'_-(1) \neq f'_+(1) \quad (./ \Delta)$$

پس تابع مشتق پذیر نمی باشد

:54



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2 = f(1) \quad (0/25) \text{ تابع پیوسته است.}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = 2 \quad (0/5), \quad f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 2}{x - 1} = 2 \quad (0/5)$$

$$\Rightarrow f'_+(1) = f'_-(1) = 2 \quad (0/25) \text{ تابع در این نقطه مشتق پذیر است.}$$

:55

$$\underbrace{m_A}_{(0/25)} < \underbrace{m_{AB} = 0}_{(0/5)} < \underbrace{m_B}_{(0/25)}$$

:56

$$\underbrace{f'(t) = -2t + 10}_{(0/5)} \Rightarrow \underbrace{f'(2) = -4 + 10}_{(0/5)} = 6$$

