

سوالات مبحث محور امتحان نهایی

درس حسابان 2، رشته ریاضی فصل 5، کاربرد های مشتق

(پاسخنامه در انتهای مطلب)

گردآوری: سجاد مردانی، رتبه 425 منطقه 1 کنکور ریاضی 1404، دانشجوی مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی شریف

1: درستی یا نادرستی هریک از عبارت های زیر را مشخص کنید.

الف) هر تابع اکیدا صعودی، نقطه عطف ندارد

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1404)

ب) تابع $f(x) = 5$ دارای بی شمار نقطه بحرانی است.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1404)

پ) خط $x = 2$ مماس قائم بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ در نقطه $(0, 2)$ است.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1403)

ت) اگر $x=c$ طول یک نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد، آنگاه: $f'(c) = 0$.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1403)

ث) اگر $f'(c) = 0$ باشد، آنگاه $x = c$ یک نقطه اکسترمم نسبی است.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1402)

ج) اگر برای تابع f داشته باشید $f''(c) = 0$ آنگاه همواره نقطه $(c, f(c))$ نقطه عطف تابع است.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1401)

چ) هر نقطه بحرانی تابع $f(x)$ ، یک نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1401)



ح) هر نقطه ای که در آن مقدار $f''(x)$ برابر صفر شود، یک نقطه عطف تابع $f(x)$ است.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1400)

خ) اگر تابع f در هر نقطه اکستریم نسبی مشتق پذیر باشد، آنگاه مشتق تابع f در این نقاط صفر می شود.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1400)

د) تابع صعودی اکید، نقطه عطف ندارد.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1400)

ذ) اگر علامت f' بر بازه ای منفی باشد، آنگاه تابع f بر آن بازه اکیدا نزولی است.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1400)

ر) در نقطه عطف علامت $f''(x)$ تغییر می کند.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1400)

ز) در هر نقطه ای که جهت تقعر منحنی تابع عوض شود آن نقطه ی عطف تابع است.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 99)

ژ) اگر $x = c$ طول نقطه اکستریم نسبی تابع $f(x)$. و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = 0$

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 99)

2: جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید

الف) خط مماس قائم منحنی تابع $y = \sqrt[3]{x}$ است

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1404)

ب) نقطه ای به طول $x=2$ ، نقطه تابع $f(x) = [x]$ است. (مینیمم نسبی، ماکزیمم نسبی)

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1404)



پ) اگر $f''(x)$ به ازای هر نقطه بازه باز I موجود و منفی باشد، تقعر منحنی تابع f در این بازه رو به است.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1404)

ت) اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطه c باشد که به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$ در این صورت $f(c)$ را یک تابع f می نامیم

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1401)

ث) اگر برای هر x در بازه I ؛ $f''(x) > 0$ ، آنگاه نمودار $f(x)$ در این بازه تقعر رو به دارد

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1401)

3: جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید:

(الف)

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1404)

(ب)

$$f(x) = \frac{2x + 4}{x - 1}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1404)

(پ)

$$f(x) = 4x^3 - 12x + 2$$

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1404)

(ت)

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$$



(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1403)

(ث)

$$f(x) = (x + 2)(x - 4)^2$$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1403)

(ج)

$$f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$$

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1403)

(چ)

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2$$

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1402)

(ح)

$$f(x) = \frac{-x}{x + 1}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1402)

(خ)

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 3}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1402)

(د)

$$f(x) = \frac{x + 3}{1 - x}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1401)



(ذ)

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x - 2}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1401)

(ر)

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1401)

(ز)

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9$$

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1400)

(ژ)

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1400)

(س)

$$f(x) = \frac{x - 2}{x + 2}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1400)

(ش)

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 99)

(ص)



$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 99)

(ض)

$$f(x) = \frac{x}{x-2}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 99)

4: معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - 3t + 12$ بر حسب متر در بازه زمانی $[1, 6]$ داده شده است.

الف) سرعت متوسط متحرک را در بازه $[1, 6]$ به دست آورید.

ب) سرعت لحظه ای متحرک را در لحظه $t=2$ به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1404)

5: مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x$ را در بازه $[0, 2]$ به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1404)

6: اگر $x = 1$ طول نقطه عطف و $x = -2$ طول یکی از نقاط بحرانی تابع

$f(x) = ax^3 + bx^2 + 24x$ باشد، آنگاه مقادیر a و b را به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1404)

7: الف) اگر f تابعی پیوسته با دامنه اعداد حقیقی باشد و $f(3) = 8 + f(1)$ آنگاه تغییر متوسط تابع

f را در بازه $[1, 3]$ به دست آورید.

ب) آهنگ تغییر لحظه ای تابع $g(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نقطه $x=27$ به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1404)



8: مقادیر اکسترمم های مطلق تابع $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x + 1$ را در بازه $[-3, 2]$ به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1404)

9: مقادیر a و b را در تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ طوری به دست آورید که $x=2$ ، طول نقطه اکسترمم نسبی و $x=0$ ، طول نقطه عطف این تابع باشد.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد و دی 1404)

10: معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = \sqrt{3t+1}$ بر حسب متر است. سرعت لحظه ای آن را در لحظه $t=5$ به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1404)

11: ماکزیمم مقدار مساحت مستطیل به ابعاد $12-x$ ، x را به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1404)

12: تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کود کان را بر حسب سانتیمتر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان میدهد که در آن x مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است.
(الف) آهنگ متوسط رشد درباره $[0, 25]$ را به دست آورید.
(ب) آهنگ لحظه ای تغییر قد کودک در ۴۹ ماهگی را به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1403)

13: نقاط اکسترمم نسبی و مطلق تابع $f(x) = x^3 - 6x^2$ را در بازه $[-1, 3]$ در صورت وجود بیابید.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1403)

14: اگر $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 1$ باشد، مقدار a را طوری بیابید که $x = \frac{1}{2}$ طول نقطه عطف نمودار تابع باشد.



(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1403)

- 15: جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می کنیم. فرض کنیم ارتفاع این جسم (برحسب متر) از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می آید. (t برحسب ثانیه)
- الف) سرعت متوسط جسم در بازه زمانی $[3, 4]$ را به دست آورید.
- ب) لحظه ای را معلوم کنید که سرعت جسم برابر 20m/s است.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1403)

- 16: مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 12x$ در بازه $[1, 3]$ را به دست آورید.

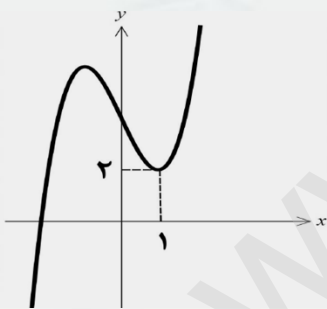
(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1403)

- 17: مقادیر a, b, c را در تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ طوری به دست آورید که در نقطه $(-1, 3)$ اکسترمم نسبی داشته باشد و $x=1$ طول نقطه عطف آن باشد.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1403)

18:

نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax + b$ به صورت مقابل است. مقادیر a و b را بیابید.



(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1403)

19:

- یک مستطیل در یک نیم دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۲ سانتیمتر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.



(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1403)

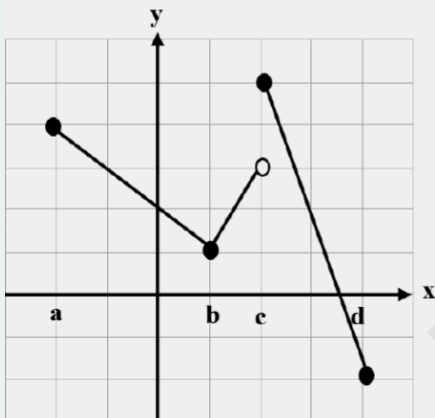
20: اکستریم های مطلق تابع $f(x) = x^5 - 5x$ را در بازه $[0, 2]$ به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1402)

21: ابتدا جهت تقعر تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ را در دامنه آن بررسی نمایید و سپس نقطه عطف آن را در صورت وجود، به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1402)

22: در شکل نمودار رسم شده است، طول نقاط اکستریم های نسبی و مطلق را مشخص کنید.



(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1402)

23: مقادیر a و b و c را در تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند:

$$f(0) = 1 \text{ و } f(2) = -3 \text{ و } x = 1 \text{ طول نقطه عطف نمودار تابع } f \text{ باشد.}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1402)

24: با رسم جدول تغییرات نشان دهید که تابع $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^2 + 1$ در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولی است.



(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1402)

25: مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 6x^2$ را روی بازه $[-2, 3]$ بیابید.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1402)

26: نقطه عطف تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ نقطه $(1, -1)$ میباشد، مقدار a و b را بیابید.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1402)

27: ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^3 + ax - b$ طوری پیدا کنید که نقطه $(2, 1)$ اکسترمم نسبی تابع باشد.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1401)

28: جهت تقعر و مختصات نقطه عطف تابع $f(x) = x(x^2 - 3) + 1$ را تعیین کنید.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1401)

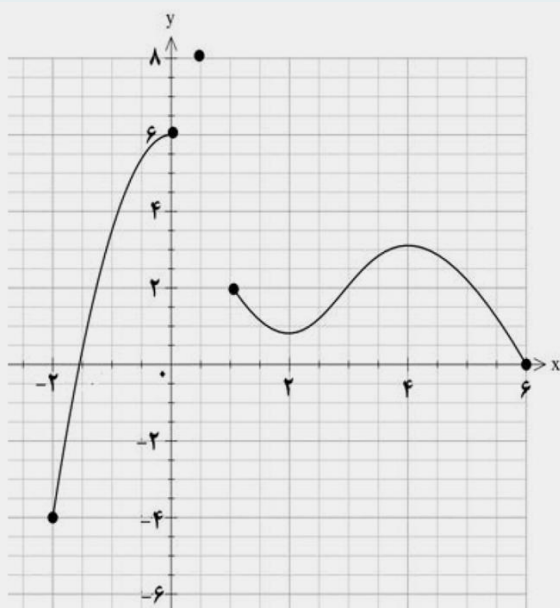
29: اگر نقطه $A(-1, 1)$ نقطه عطف تابع با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2$ باشد. مقادیر a و b را به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1401)

30



با توجه به نمودار داده شده، به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) مقدار ماکزیمم مطلق را بنویسید.

ب) مقدار مینیمم مطلق را بنویسید.

پ) طول نقطه ماکزیمم نسبی را بنویسید.

ت) طول نقطه مینیمم نسبی را بنویسید.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1401)

31:

یک مستطیل در یک نیم دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۴ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1401)

32: فرض کنید $f(x) = \frac{ax+b}{cx+\alpha}$ محل تقاطع مجانب های آن نقطه $(2,1)$ است اگر این تابع از نقطه

$(-1,0)$ بگذرد ضابطه تابع را به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1401)

33: ورق فلزی مستطیل شکلی، به طول ۱۶ سانتی متر و عرض ۶ سانتی متر در نظر بگیرید. می خواهیم از

چهار گوشه آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن ها را کنار بگذاریم. سپس لبه جعبه را به

اندازه x بر می گردانیم تا یک جعبه سر باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1400)



34: جهت تقعر تابع $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ را در دامنه اش بررسی کرده و نقطه عطف آن را در صورت وجود به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 1400)

35: اکسترم های مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ را در بازه $[-1, 1]$ تعیین کنید.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1400)

36: اگر نقطه $A(-1, 1)$ نقطه عطف منحنی $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ باشد. مقادیر a و b را به دست آورید.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 1400)

37: مقادیر a و b و c را در تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند.

$$f(0)=1, f(1)=2 \text{ و } x=\frac{1}{2} \text{ طول نقطه عطف نمودار تابع } f \text{ باشد.}$$

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1400)

38: مقادیر اکسترم مطلق تابع $g(x) = x^3 + 2x - 5$ را در بازه $[-2, 1]$ در صورت وجود تعیین کنید.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 1400)

39: اکسترم های مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه $[-3, 1]$ مشخص کنید.

(امتحان نهایی حسابان 2 شهریور 99)

40: جهت تقعر و نقطه عطف تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ را مشخص کنید.

(امتحان نهایی حسابان 2 خرداد 99)



41: مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x + 1$ را درباره $[-۱, ۲]$ تعیین کنید.

(امتحان نهایی حسابان 2 دی 99)

پاسخنامه

1: الف) نادرست ب) درست پ) درست ت) نادرست ث) نادرست ج) نادرست چ) نادرست ح) نادرست

خ) درست د) نادرست ذ) درست ر) درست ز) نادرست ژ) نادرست

2: الف) $x=0$ ب) ماکزیمم نسبی پ) پایین ت) ماکزیمم نسبی ث) بالا

3:

الف)



$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \xrightarrow{f'=0} \begin{cases} x=1 & (0/25) \\ x=3 & (0/25) \end{cases}$$

$$f''(x) = 6x - 12 \xrightarrow{f''=0} x=2 \quad (0/25)$$

	$-\infty$	۱	۲	۳	$+\infty$	
f'	+	○	-	-	○	+
f''	(-)	(-)	○	(+)	(+)	(+)
f		۴	۲	○		
		ماکزیم نسبی	نقطه عطف	مینیمم نسبی		

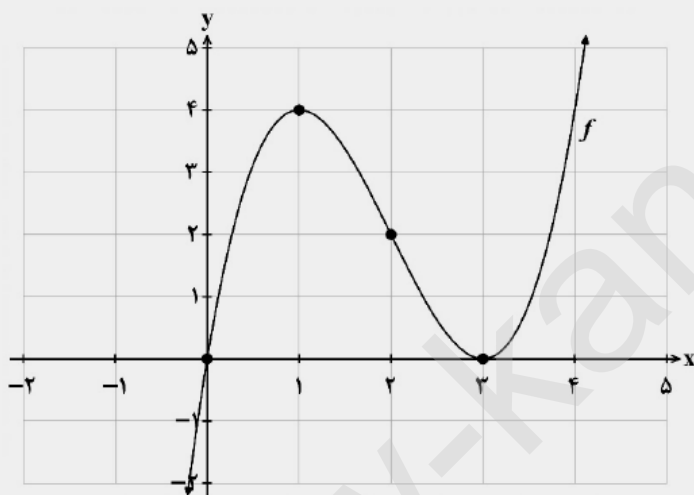
توضیحات جدول رفتار:

تعیین علامت مشتق تابع (0/25)

تعیین علامت مشتق دوم و جهت تقعر تابع (0/25)

مشخص کردن صعودی و نزولی بودن تابع و نقاط ماکزیمم و

مینیمم و نقطه عطف تابع (0/25)



رسم صحیح نمودار تابع (0/5)

(ب)



تعیین محل برخورد با محورها (به صورت جبری، به صورت مختصاتی، در جدول رفتار و یا بر روی نمودار) هر کدام
 $x = 0 \Rightarrow f(0) = -4$, $y = 0 \Rightarrow x = -2$ (۰ / ۲۵) تعلق گیرد.

مشخص کردن هر یک از مجانب‌ها (از طریق تعریف، فرمول، در جدول یا بر روی نمودار) هر کدام (۰ / ۲۵) تعلق گیرد.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+4}{x-1} = 2 \text{ یا } y = \frac{a}{c} = 2, \text{ در نتیجه } y = 2 \text{ مجانب افقی تابع است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+4}{x-1} = -\infty \text{ یا } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+4}{x-1} = +\infty \text{ یا } x = \frac{-d}{c} = 1, \text{ در نتیجه } x = 1 \text{ مجانب قائم}$$

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
f'	-	-	-	-	-
f''	-	-	-	0	+
f	2	↘	↘	↘	2

است.

(صفحه ۱۴۱)

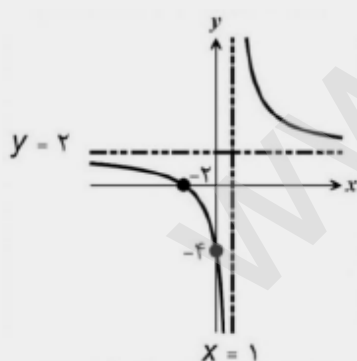
$$f'(x) = \frac{-6}{(x-1)^2}$$

محاسبه مشتق اول و تعیین علامت آن در جدول (۰ / ۲۵)

محاسبه مشتق دوم، تعیین علامت آن و مشخص کردن جهت تقعر در جدول (۰ / ۲۵)

$$f''(x) = \frac{12}{(x-1)^3}$$

رسم صحیح هر شاخه از نمودار (۰ / ۲۵)



(پ)

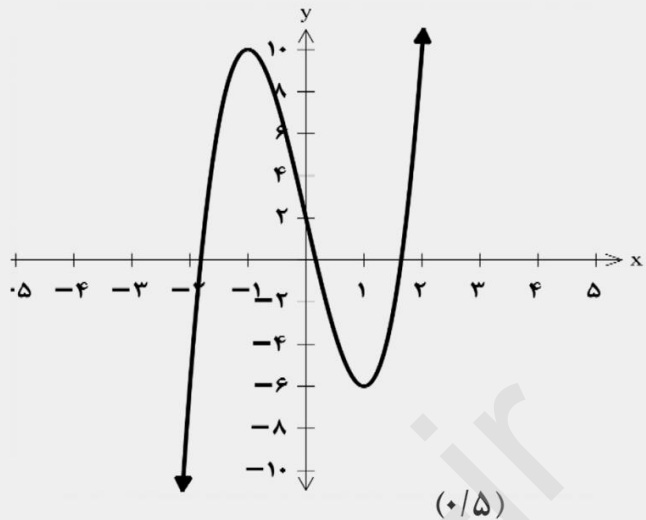


$$\overbrace{f'(x) = 12x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 1}^{(+/-25)}$$

$$\overbrace{f''(x) = 24x = 0 \Rightarrow x = 0}^{(+/-25)}$$

x	-1	0	1
$f'(x)$	+	-	+
$f''(x)$	-	+	+
$f(x)$	↖	↘	↗

(0/5)



ص ۱۴۴

(ت)

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{-1\} \quad \overbrace{f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}, \quad x \neq -1}^{(+/-25)}$$

$$\overbrace{f''(x) = \frac{-6}{(x+1)^3}, \quad x \neq -1}^{(+/-25)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$$

(0/25) مجانب افقی $y = 2$

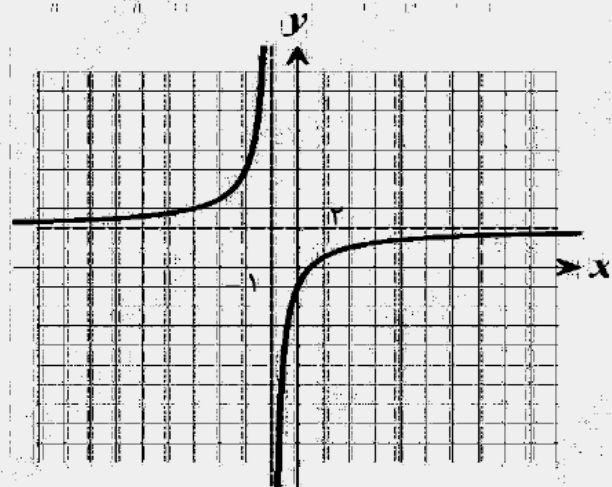
$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{-3}{+} = -\infty$$

(0/25) مجانب قائم $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{-3}{-} = +\infty$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+
$f''(x)$	+	-	-
$f(x)$	↖	↗	↖

(0/5)



(صفحه ۱۴۱)



Kanoon.Ir

(ث)

$$y' = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0, 4$$

(۰/۲۵)



(اگر دانش آموزی مشتق را به صورت $(x-4)^2 + 2(x+2)(x-4) = (x-4)(3x)$ بنویسد، (۰/۲۵) بارم این قسمت تعلق گیرد.)

$$y'' = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

(۰/۲۵)

x	$-\infty$			۲		۴	$+\infty$
y'	-	+	0	-	+	0	+
y''	-	-	-	0	+	+	+
f	$-\infty$		۳۲	۱۶	۰		$+\infty$

ماکزیمم عطف مینیمم

(۰/۵)



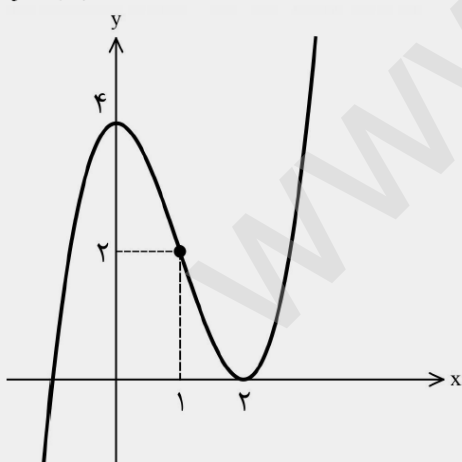
رسم شکل (۰/۵)

(صفحه ۱۳۹)

(ج)

$$f'(x) = (x-2)^2 + 2(x-2)(x+1) \xrightarrow{f'(x)=0} x=0, x=2 \quad (۰/۵)$$

$$f''(x) = 6x - 6 \xrightarrow{f''(x)=0} x=1 \quad (۰/۲۵)$$



(۰/۵)

	۰	۱	۲
f'	+	-	+
f''	-	-	+
f	$-\infty$	۴	۲

(۰/۷۵)

(صفحه ۱۳۹)

اگر دانش آموزی در ضابطه تابع ابتدا حاصلضرب پرانتزها را به دست آورد و سپس مشتق بگیرد، نمره تعلق گیرد.

(چ)



Kanoon.Ir

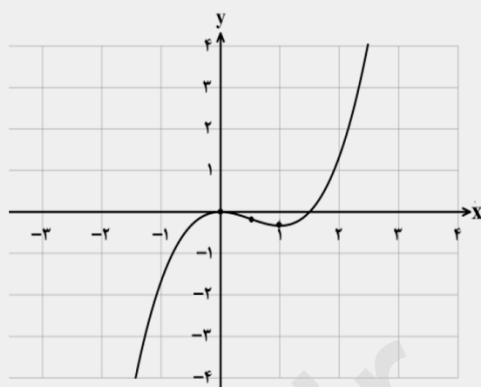
$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & (0/25) \\ x=1 & (0/25) \end{cases}$$

$$f''(x) = 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad (0/25)$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
f'	+	0	-	0	+
f''	-	-	+	+	+
f		$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$
		max	$-\frac{1}{6}$	min	

جدول (۰/۵)



رسم نمودار (۰/۵)

(ح)

(صفحه ۱۴۴)

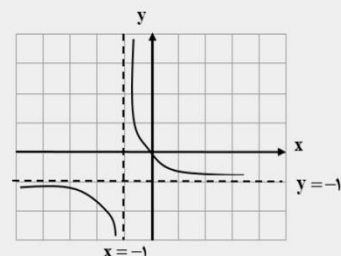
$$x = -1 \quad \text{مجانِب قائم} \quad (0/25)$$

$$y = -1 \quad \text{مجانِب افقی} \quad (0/25)$$

$$y' = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0 \quad (0/25)$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	-	-	-
y	-1	$-\infty$	-1

جدول (۰/۵)



رسم شکل (۰/۵)

(خ)

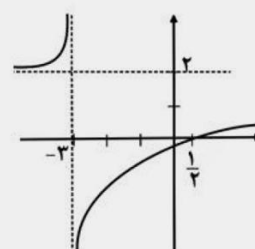
$$y' = \frac{2(x+3) - 1(2x-1)}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2} > 0 \quad (0/25) \quad \text{اکیداً صعودی}$$

$$x = -3 \quad \text{مجانِب قائم} \quad (0/25)$$

$$y = 2 \quad \text{مجانِب افقی} \quad (0/25)$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y'	+	+	+
y	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

جدول (۰/۵)



رسم شکل (۰/۵)



(د)

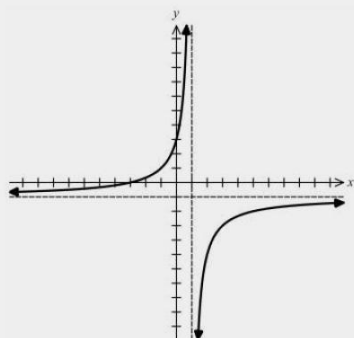
$x=1$ مجانب قائم (۰/۲۵) ، $y=-1$ مجانب افقی (۰/۲۵)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$+$		$+$
f	-1	$+\infty$	-1

(۰/۲۵) نقطه بحرانی ندارد $f'(x) = \frac{4}{(1-x)^2}$

جدول (۰/۷۵)

نمودار (۰/۵)



(ذ)

$x=2$ مجانب قائم (۰/۲۵)

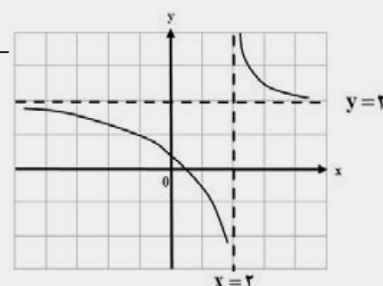
$y=2$ مجانب افقی (۰/۲۵)

$y' = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$ (۰/۵)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y	2	$+\infty$	2

جدول (۰/۷۵)

رسم شکل (۰/۵)



(ر)

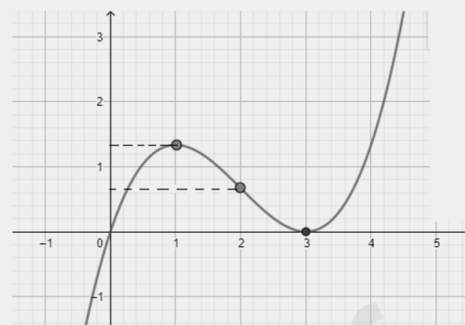


Kanoon.Ir

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 \quad (0/25) \quad f''(x) = 2x - 4 \quad (0/25)$$

رسم نمودار (0/75) و جدول (1) نمره

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f''(x)$			0			
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$
		Max نسبی	نقطه عطف	Min نسبی		



(ز)

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9, \quad D_f = \mathbb{R}$$

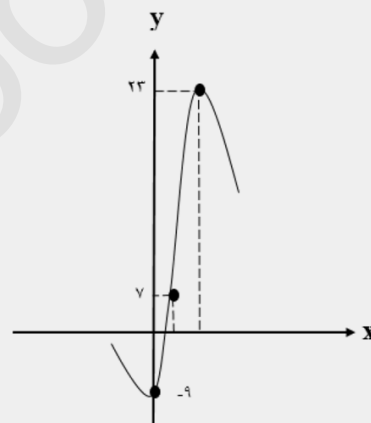
(مشابه تمرین 1 صفحه 144)

رسم شکل (0/5)

$$f'(x) = -3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases} \quad (0/25)$$

$$f''(x) = -6x + 12 = 0 \Rightarrow x=2 \quad (0/25)$$

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
f'	-	0	+	+	0	-
f''	+	+	0	-	-	-
f	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$
	$\cup$	min	$\cup$	$\cap$	max	$\cap$



رسم جدول (0/5)

(ژ)

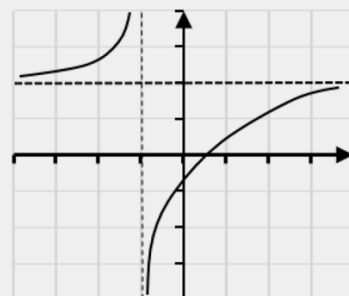
$$x = -1 \quad \text{مجانِب قائم} \quad (0/25)$$

$$y = 2 \quad \text{مجانِب افقی} \quad (0/25)$$

$$y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0 \quad (0/25)$$

رسم شکل (0/5)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$
		-∞	



رسم جدول (1)



Kanoon.Ir

(س)

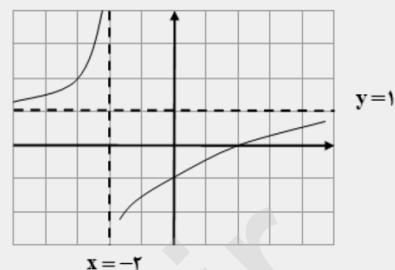
$$x = -2 \quad \text{مجانِب قائم} \quad (0/25)$$

$$y = 1 \quad \text{مجانِب افقی} \quad (0/25)$$

$$y' = \frac{4}{(x+2)^2} > 0 \quad (0/25)$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f'		+	+
f	$1 \nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\searrow 1$

جدول (0/5)



رسم شکل (0/5)

(ش)

$$y' = 3x^2 - 3 \quad (0/25) \xrightarrow{y'=0} x = \pm 1 \quad (0/25)$$

$$y'' = 6x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 1) \quad \text{نقطه عطف (0/5) نمره}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$-\infty$	3	1	-1	$+\infty$	

$\nearrow$ $\searrow$ $\searrow$ $\nearrow$

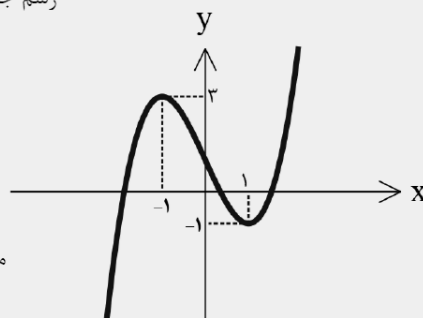
$\max$ $\min$

max

min

رسم جدول (0/5) نمره

رسم نمودار (0/5) نمره



مشابه تمرین صفحه ۱۴۴

(ص)



Kanoon.Ir

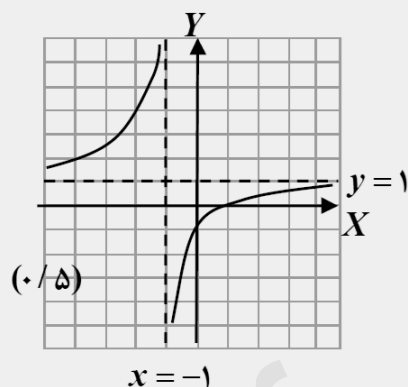
$x = -1$ م. قائم (۰/۲۵)

$y = 1$ م. افقی (۰/۲۵)

$$y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \quad (۰/۵)$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'		+	+
f	$1 \nearrow$	$-\infty$	$+\infty \searrow$

(۰/۵)



مشابه مثال صفحه ۱۴۲

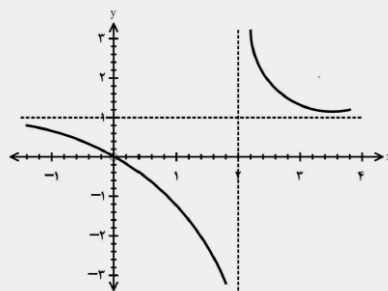
(ض)

$x = 2$ مجانب قائم (۰/۲۵)

$y = 1$ مجانب افقی (۰/۲۵)

$$y' = \frac{-2}{(x-2)^2} < 0 \quad (۰/۲۵)$$

رسم شکل (۰/۵)



رسم جدول (۰/۵)

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		-		-	
$f(x)$	$1 \searrow$	$0 \searrow$	$+\infty$	$3 \searrow$	$1 \searrow$

4:

$$\frac{f(6) - f(1)}{6 - 1} \quad (۰/۲۵) = \frac{30 - 10}{5} = 4 \quad (۰/۲۵)$$

قسمت الف)

$$f'(1) \neq f'_-(1)(t) = 2t - 3 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow f'(2) = 1 \quad (۰/۲۵)$$

قسمت ب)



Kanoon.Ir

:5

$$f'(x) = -x^2 + 1 \quad (\circ / 25) \xrightarrow{f'(x)=0} \begin{cases} x=1 \quad (\circ / 25) \\ x=-1 \notin [0, 2] \end{cases}$$

$$f(0)=0 \quad (\circ / 25) \quad f(1)=\frac{2}{3} \quad (\circ / 25) \quad f(2)=-\frac{2}{3} \quad (\circ / 25)$$

صفحه ۱۱۷

مقدار مینیمم مطلق: $\frac{-2}{3} \quad (\circ / 25)$

:6

$$\begin{cases} f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 24 \quad (\circ / 25) \\ f''(x) = 6ax + 2b \quad (\circ / 25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(-2) = 0 \quad (\circ / 25) \\ f''(1) = 0 \quad (\circ / 25) \end{cases} \Rightarrow a = -1 \quad (\circ / 25), \quad b = 3 \quad (\circ / 25)$$

:7

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{f(1) + 8 - f(1)}{2} = 4$$

$\underbrace{\quad}_{(\circ / 25)} \quad \underbrace{\quad}_{(\circ / 25)}$

الف) روش اول: (صفحه ۱۱۰)

$$(\circ / 25) \quad \frac{f(3) - f(1)}{2} = 4 \quad \text{روش دوم: } f(3) - f(1) = 8 \quad (\circ / 25) \quad \text{در نتیجه}$$

$$g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow g'(27) = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27}$$

$\underbrace{\quad}_{(\circ / 25)} \quad \underbrace{\quad}_{(\circ / 25)}$

ب) روش اول:

$$g(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow g'(27) = \frac{1}{27}$$

روش دوم:

:8



$$f'(x) = -2x^2 - 2x + 2 \quad (0/25) \xrightarrow{f'=0} x = -2, x = 1 \quad (0/25) \quad (\text{صفحه ۱۱۶})$$

در نتیجه نقاط $x = -2$ و $x = 1$ نقاط بحرانی تابع هستند.

$$f(1) = \frac{10}{3} \quad (0/25) \quad \text{و} \quad f(-2) = \frac{-17}{3} \quad (0/25)$$

$$f(-3) = -2 \quad (0/25) \quad \text{و} \quad f(2) = -\frac{1}{3} \quad (0/25)$$

$$(0/25) y = \frac{-17}{3} \quad \text{و} \quad (0/25) y = \frac{10}{3} \quad \text{مقدار ماکزیمم مطلق تابع } f \text{ برابر } \frac{10}{3} \text{ و مقدار مینیمم مطلق تابع } f \text{ برابر } \frac{-17}{3}$$

است.

توضیحات جهت نمره‌گذاری: اگر با رسم دقیق شکل، مقادیر اکسترم‌های مطلق به صورت دقیق مشخص شود، به تناسب نمره تعلق گیرد.

9:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad (0/25)$$

$$f''(x) = 6x + 2a \quad (0/25)$$

$$\begin{cases} f''(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \quad (0/25) \Rightarrow a = 0 \quad (0/25), \quad b = -12 \quad (0/25)$$

10:

$$f'(t) = \frac{3}{2\sqrt{3t+1}} \Rightarrow f'(5) = \frac{3}{8} \quad (0/25)$$

11:

ص ۱۱۸ و ۱۱۹

$$S(x) = x(12 - x^2) = -x^3 + 12x \quad (0/25)$$

$$S'(x) = -3x^2 + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = +2 \end{cases} \quad (0/25) \xrightarrow{x \in [0, \sqrt{12}]} x = 2 \Rightarrow \begin{cases} S(0) = S(\sqrt{12}) = 0 \\ S(2) = 16 = \max \end{cases} \quad (0/25)$$



:12

$$\frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{35}{25} = \frac{7}{5} \quad (0/25)$$

(الف)

$$f'(x) = 7 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=25} f'(25) = \frac{1}{2} \quad (0/25) \quad (\text{صفحه 105})$$

(ب)

:13

$$f'(x) = 3x^2 - 12x \xrightarrow{f'=0} 3x(x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \notin [-1, 2] \end{cases} \quad (0/25)$$

x	-1	0	2
f'	+	0	-
f	-7	0	-27

رسم جدول (0/25)

(0,0) نقطة ماكزيمم نسبي (0/25)، (0,0) نقطة ماكزيمم مطلق (0/25) و (2,-27) نقطة مينيمم مطلق (0/25) اين تابع در بازه $[-1, 2]$ است. (صفحه 125)

:14

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x \quad (0/25) \rightarrow f''(x) = 6ax + 6 \quad (0/25)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{1}{2}} 3a + 6 = 0 \quad (0/25) \rightarrow a = -2 \quad (0/25)$$

:15



$$\text{الف) روش اول: } \frac{h(4) - h(3)}{\underbrace{4 - 3}_{(0/25)}} = \frac{80 - 75}{\underbrace{1}_{(0/25)}} = \frac{5}{(0/25)}$$

$$\text{روش دوم: سرعت متوسط} = h'(3/5) = \underbrace{-10(3/5)}_{(0/25)} + \underbrace{40}_{(0/25)} = \frac{5}{(0/25)}$$

$$\text{ب) } \underbrace{h'(t) = -10t + 40}_{(0/5)} \Rightarrow -10t + 40 = 20 \Rightarrow t = 2 \quad (0/25)$$

:16

$$\underbrace{f'(x) = 3x^2 - 12 = 0}_{(0/25)} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \times \quad (0/25) \quad \left. \begin{array}{l} f(-1) = 11 \quad (0/25) \\ f(2) = -16 \quad (0/25) \\ f(3) = -9 \quad (0/25) \end{array} \right\} \Rightarrow \max \text{ مطلق} = 11 \quad (0/25)$$

:17

$$\left. \begin{array}{l} f(3) = -1 \Rightarrow 27 + 9a + 3b + c = -1 \quad (0/25) \\ f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(3) = 0 \Rightarrow 27 + 6a + b = 0 \quad (0/25) \\ f''(x) = 6x + 2a \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0 \quad (0/25) \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{a = -3}_{(0/25)}, \underbrace{b = -9}_{(0/25)}, \underbrace{c = 26}_{(0/25)}$$

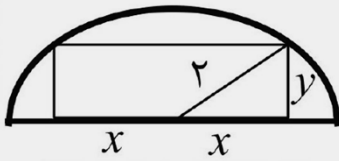
:18

$$f'(1) = 0 \xrightarrow{f'(x) = 3x^2 + a} 3(1)^2 + a = 0 \Rightarrow a = -3$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow (1)^3 + a(1) + b = 2 \xrightarrow{a = -3} 1 - 3 + b = 2 \Rightarrow b = 4$$

:19





با توجه به شکل $y^2 + x^2 = 4$ ، پس $y = \sqrt{4 - x^2}$ در نتیجه:

$$S = 2xy \xrightarrow{y = \sqrt{4 - x^2}} S(x) = 2x\sqrt{4 - x^2} \Rightarrow S'(x) = 2\sqrt{4 - x^2} + \frac{(-2x)}{2\sqrt{4 - x^2}}(2x)$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(4 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Rightarrow -4x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow 2x = 2\sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{2}$$

20:

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = +1 \\ x = -1 \end{cases} \quad (0/25) \quad \text{غیر قابل قبول}$$

$$f(1) = -4 \quad \text{مینیمم مطلق} \quad (0/25)$$

$$f(0) = 0 \quad (0/25)$$

$$f(2) = 22 \quad \text{ماکزیمم مطلق} \quad (0/25)$$

21:

صفحه ۱۳۶

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{6}{(x-1)^3}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$-$	$+$	
f			

جدول (۰/۵)

نقطه عطف وجود ندارد (۰/۲۵)

22:



- d مینیمم مطلق
c ماکزیمم مطلق
c ماکزیمم نسبی
b مینیمم نسبی

:23

$$f(0)=1 \Rightarrow c=1 \quad (0/25)$$

$$f(2)=-3 \Rightarrow 4a+4b+1=-3 \Rightarrow 4a+4b=-4 \quad (0/25)$$

$$f''(x)=6ax+2b \Rightarrow f''(1)=0 \Rightarrow 6a+2b=0 \quad (0/5)$$

$$\Rightarrow a=1, b=-3 \quad (0/5)$$

:24

$$f'(x)=2x^3+2x=0 \quad (0/25) \Rightarrow 2x(x^2+1)=0$$

$$\Rightarrow x^2=-1 \quad \text{غیر قابل قبول}, x=0 \quad (0/25)$$

$$(-\infty, 0] \text{ اکیدا نزولی} \quad (0/25), [0, +\infty) \text{ اکیدا صعودی} \quad (0/25)$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$\searrow$		$\nearrow$

(0/5)

:25

$$y'=3x^2-12x=0 \Rightarrow x=0 \quad (0/25), x=4 \notin [-2, 3] \quad (0/25) \quad \text{غ ق ق} \quad (\text{صفحه ۱۲۶ کتاب})$$

$$\underbrace{f(-2)=-32, f(0)=0, f(3)=-27}_{(0/25)}$$

$-32 = \text{مینیمم مطلق} \quad (0/25)$

$0 = \text{ماکزیمم مطلق} \quad (0/25)$

:26

$$f(x)=x^3+ax^2+bx$$

$$f(1)=-11 \Rightarrow 1+a+b=-11 \quad (0/5)$$

$$f''(1)=0 \Rightarrow 6(1)+2a=0 \quad (0/5) \Rightarrow a=-3 \quad (0/25) \Rightarrow b=-9 \quad (0/25)$$



:27

$$f(1) = 2 \Rightarrow a - b = 1 \quad (0/25)$$

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + a \\ f'(1) = 0 \end{cases} \quad (0/25) \Rightarrow 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3 \quad (0/25), \quad b = -4 \quad (0/25)$$

:28

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (0/25)$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f			

نقطه $(0,1)$ نقطه عطف تابع است. $(0/25)$
جدول $(0/5)$

:29

$$\begin{cases} f(-1) = -a + b + 2 = 1 \Rightarrow -a + b = -1 \quad (0/5) \\ f''(-1) = 0 \Rightarrow -6a + 2b = 0 \quad (0/5) \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-1}{2}, \quad b = \frac{-3}{2}$$

:30

الف) ۸

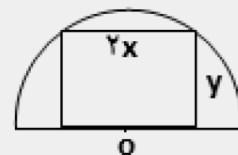
ب) -۴

پ) ۴

ت) ۲

:31

$$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow S(x) = 2x \left(\sqrt{16 - x^2} \right) \quad (0/25)$$



$$S'(x) = \frac{32 - 4x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \quad (0/5) \quad x = \sqrt{4}, y = \sqrt{4}$$

طول $2\sqrt{4}$, عرض $\sqrt{4}$ $(0/5)$

:32



$$cx + d = 0 \Rightarrow d = -2c \quad (0/25) \quad (-1, 0) \Rightarrow \frac{-a + b}{-c + d} = 0 \Rightarrow a = b$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{cx} = 1 \Rightarrow a = c \quad (0/25) \quad f(x) = \frac{x+1}{x-2} \quad (0/25)$$

:33

$$\text{طول جعبه} = 16 - 2x, \quad x \in [0, 8] \quad \text{عرض جعبه} = 6 - 2x, \quad x \in [0, 3]$$

$$\Rightarrow v(x) = x(16 - 2x)(6 - 2x) = 4x^3 - 44x^2 + 96x, \quad 0 \leq x \leq 3 \quad (0/25)$$

$$v'(x) = 12x^2 - 88x + 96 = 0 \quad (0/25) \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \notin [0, 3] & (0/25) \\ x = \frac{4}{3} \in [0, 3] & (0/25) \end{cases}$$

چون $v(0) = v(3) = 0$ ، پس به ازای $x = \frac{4}{3}$ بیشترین مقدار حجم حاصل می شود. (0/25)

:34

$$D_f = \mathbb{R} \quad (0/25)$$

(مشابه تمرین 2 صفحه 136)

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt{(x-1)^2}} \quad (0/25) \Rightarrow f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt{(x-1)^5}} \quad (0/25)$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$+$ ∪	$\emptyset$	$-$ ∩

تنظیم جدول (0/25)

$f'(1) = +\infty$ پس تابع در $x = 1$ مماس قائم دارد و $x = 1$ نقطه عطف است. (0/25)

:35

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \notin [-1, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = -1 \\ f(0) = 1 \\ f(-1) = -3 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{max} \\ \text{min} \end{matrix}$$

:36



$$\underbrace{f(-1) = 1 \Rightarrow a - b = 3}_{\cdot / 25}, \quad \underbrace{f''(-1) = 0 \Rightarrow -6 + 2a = 0}_{\cdot / 25} \Rightarrow \underbrace{a = 3}_{\cdot / 5}, b = 0$$

:37

$$\begin{aligned} f(0) = 1 &\Rightarrow c = 1 \quad (\cdot / 25) \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx^2 + 1 \\ f(1) = 2 &\Rightarrow a + b + 1 = 2 \Rightarrow a + b = 1 \quad (\cdot / 25) \\ f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 &\Rightarrow 3a + 2b = 0 \quad (\cdot / 5) \Rightarrow \begin{matrix} a = -2 \\ b = 3 \end{matrix} \quad (\cdot / 5) \end{aligned}$$

:38

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 + 2 \neq 0 \quad (\cdot / 5) \\ g(-2) &= -8 - 4 - 5 = -17 \quad \min \quad (\cdot / 25), \quad g(1) = 1 + 2 - 5 = -2 \quad \max \quad (\cdot / 25) \end{aligned}$$

:39

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 + 6x - 12 = 0 \quad (\cdot / 25) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \quad (\cdot / 5) \quad \text{مشابه مثال صفحه ۱۲۳} \\ f(-1) &= 13 \\ f(1) &= -7 \quad (\cdot / 25) \Rightarrow \min : (1, -7) \quad (\cdot / 25), \max : (3, 45) \quad (\cdot / 25) \\ f(3) &= 45 \end{aligned}$$

:40

$$f'(x) = 3x^2 + 6x \quad (\cdot / 25) \Rightarrow f''(x) = 6x + 6 = 0 \quad (\cdot / 5) \Rightarrow x = -1 \rightarrow (-1, 3) \quad (\cdot / 25) \quad \text{نقطه عطف}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
	$\wedge$		$\vee$

مثال صفحه ۱۲۹

$(-\infty, -1)$ تنوع رو به پایین $(\cdot / 25)$

$(-1, +\infty)$ تنوع رو به بالا $(\cdot / 25)$



$$\underbrace{f'(x) = 3x^2 - 3 = 0}_{(0/\Delta)} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\underbrace{f(1) = -1 \quad f(-1) = 3 \quad f(2) = 3}_{(0/\Delta)} \Rightarrow \begin{cases} \max f(x) = 3 & (0/2\Delta) \\ \min f(x) = -1 & (0/2\Delta) \end{cases}$$

